



Problematario de precálculo y cálculo

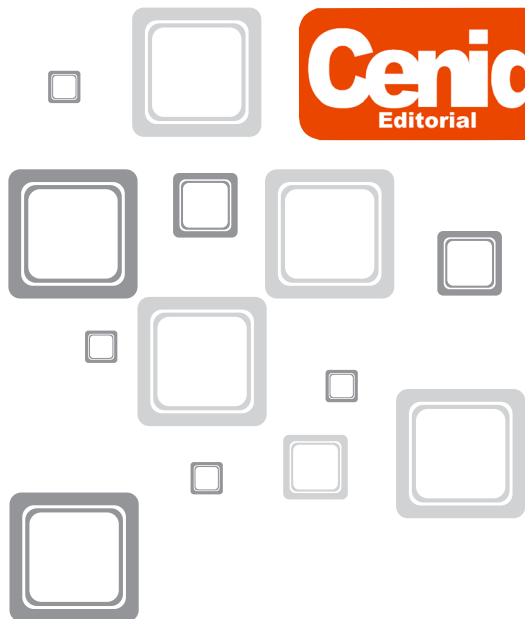
Alfonso Castillo Beltrán

Joel Ayala de la Vega

Irene Aguilar Juárez

Alfonso Zarco Hidalgo





En Cenid estamos a sus órdenes si desea:

Asesoría para elaborar un libro

Publicar un texto

Contáctenos

Teléfono: 3315 420983

www.cenid.org.mx

redesibero@yahoo.com.mx

Pompeya N° 2705 Col. Providencia

C.P. 44630 Guadalajara, Jalisco, México

Diagramación y cubierta: Esther Ramírez Lara

Probleuario de precálculo y cálculo

Derechos de autor:

© 2016, Alfonso Castillo Beltrán, Joel Ayala de la Vega, Irene Aguilar Juárez, Alfonso Zarco Hidalgo

© Editorial Centro de estudios e investigaciones
para el desarrollo docente. Cenid AC
Pompeya N° 2705 Col. Providencia
C.P. 44630 Guadalajara, Jalisco, México

ISBN: 978-607-8435-25-8

Primera edición

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Socio # 3758

Cenid y su símbolo identificador son una marca comercial registrada.

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra mediante algún método, sea electrónico o mecánico (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, la grabación o cualquier sistema de recuperación o almacenamiento de información), sin el consentimiento por escrito del editor.

Impreso en México / Printed in Mexico

INTRODUCCIÓN.	6
--------------------	---

CAPÍTULO I

ÁLGEBRA

Factorice el máximo factor común.	14
Factorice por factor común.	14
Factorice en forma completa cada trinomio	14
Diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto	15
Suma y Diferencia de cubos	15
Factorice mixtas.	16
Expresiones Racionales	17
Multiplicación y División de Expresiones Racionales	18
Suma y Resta de expresiones Racionales	19
Mínimo común denominador.	19
Sume o Reste.	20
Simplifique las expresiones racionales	22
LEYES DE LOS EXPONENTES Y RADICALES	25
Radicales	25
Simplifica la expresión.	35

CAPÍTULO II

FUNCIONES Y LÍMITES

Desigualdades	38
RELACIONES	42
Dadas las siguientes relaciones, determine el conjunto imagen, grafique y diga si es función.	42
DOMINIO Y RANGO	43
Dadas las siguientes funciones; encontrar el dominio, el rango y grafique cada una de ellas.	43
OPERACIONES CON FUNCIONES	46
Dadas las funciones f y g . Encontrar $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g , $f \circ g$; así como los respectivos dominios.	47
FUNCIONES INVERSAS	47
Encuentre la función inversa de cada una de las siguientes funciones (Si es que existe):	47
LÍMITES	48
Aplicando la definición de límite, demostrar que:	48
Calcular los siguientes límites.	48
Asíntotas	59
LIMITES POR LA REGLA DE L'HOPITAL	62

CAPÍTULO III**CÁLCULO DIFERENCIAL**

DERIVADAS66
Partiendo de la definición de derivada.	
De las siguientes funciones obtenga $\frac{dy}{dx} = f'(x)$:66
Aplicando las reglas de derivación, obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones:66
Comprobar cada una de las siguientes derivadas, aplicando reglas de derivación68
Derivar cada una de las siguientes funciones..69
Encontrar la $\frac{dy}{dx}$ por medio de la derivación implícita:70
Use derivación logarítmica para calcular $\frac{dy}{dx}$71
Obtener la segunda derivada de las siguientes funciones..71
Encontrar todos los extremos relativos. Utilizar el criterio de la segunda derivada donde sea conveniente.72
Encontrar la pendiente de cada curva en el punto indicado..73
Recta tangente.73
Recta Tangente y Normal.74
Determina los extremos locales (máximos y/ó mínimos relativos) de cada una de las siguientes funciones.75
Determina los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones..75



Índice

Determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de las siguientes funciones.	76
APLICACIONES DE LA DERIVADA.	76
Aplicando conceptos de derivación, resuelva los siguientes problemas:	76
PROBLEMAS DE RAZÓN DE CAMBIO.	78
CAPÍTULO IV	
CÁLCULO INTEGRAL	
Aplicaciones de la Integral. Áreas	82
Técnicas de Integración	84
Bibliografía	109

La licenciatura de Ingeniería en Computación inició sus actividades en la Unidad Académica Profesional Texcoco en septiembre de 1996, recibió como primera generación a 100 alumnos de Texcoco y de los municipios aledaños. Desde los primeros días, los docentes a cargo de las asignaturas de cálculo, álgebra y geometría observaron la necesidad de apoyar a los alumnos de nuevo ingreso para fortalecer sus habilidades matemáticas, las cuales son necesarias para lograr un buen desempeño académico en su futura profesión.

Como resultado de esta situación, en uno de los primeros acuerdos de Academia de la incipiente licenciatura se estipuló trabajar en un curso propedéutico de matemáticas dedicado a nivelar los conocimientos de los alumnos aceptados. Por lo tanto fue necesario desarrollar un compilado de ejercicios que fueran usados en dicho curso.

Con el transcurrir del tiempo, el curso propedéutico maduró y se estableció como un taller de matemáticas que se imparte durante todo el primer semestre. En él no sólo participan los docentes de asignatura, sino que también incluye a alumnos de tercer, quinto y séptimo semestre, quienes dedican su tiempo a trabajar con sus nuevos compañeros en el desarrollo de sus habilidades matemáticas y se ha convertido en un espacio de inducción a la comunidad estudiantil de Ingeniería.

Año con año la Coordinación de la licenciatura y la Academia de Ingeniería establecen la estructura que tendrá el taller de matemáticas, se reciben alumnos voluntarios que dedicarán tres horas a la semana a nivelar a los nuevos jóvenes que formarán parte de esta comunidad de estudiantes y se prepara el material didáctico que se usará. Como resultado de más de 15 años de revisión y mejora del material usado en el taller de matemáticas se ha generado este problemario de precálculo y cálculo. Este documento es muestra del trabajo colaborativo de una comunidad, que consiente de las debilidades de sus miembros, invierte tiempo y dedicación para apoyar a los nuevos ingenieros en formación con la finalidad de minimizar la deserción y mejorar el desempeño académico de la comunidad.

Como alumno de nuevo ingreso eres bien recibido en esta comunidad, esperamos que te sea útil este material y que en su momento te sumes al equipo de trabajo que dedica su esfuerzo para el engrandecimiento de nuestra Universidad.

Bienvenido.

M en ISC Irene Aguilar Juárez

Coordinadora de Ingeniería en Computación

del Centro Universitario UAEM Texcoco

“Una persona usualmente se convierte en aquello que cree que es. Si yo sigo diciéndome a mí mismo que no puedo hacer algo, es posible que yo termine siendo incapaz de hacerlo. Por el contrario si yo tengo la creencia que sí puedo hacerlo, con seguridad yo adquiriré la capacidad de realizarlo aunque no la haya tenido al principio”.

Gandhi



INTRODUCCIÓN

"La disciplina trasciende a la inteligencia"

Dicho japonés

Las Matemáticas, según Penrose (Penrose, 2002), se pueden ver bajo dos prismas:

- Las matemáticas son un arte, "es el mayor de los artes". Entendiéndose un arte como una forma de abstraer la realidad. La matemática nos permite crear y manipular diferentes tipos de espacios y estos, a su vez, pueden abstraer la realidad.
- También puede verse como un lenguaje formal, teniendo las matemáticas la capacidad de manipular diferentes espacios, se le permite al científico la utilización de las matemáticas como un lenguaje formal que permite conceptualizar, expresar y manipular fenómenos.

Dentro de cualquier licenciatura en Ingeniería, el estudiante necesita una herramienta que le permita expresar y manipular formalmente una realidad. Dentro de lo que es la Ingeniería en Computo es vital el conocimiento de las matemáticas ya que nos permite sistematizar elementos como el análisis de algoritmos, el diseño y manipulación de las bases de datos, el diseño y manipulación de las redes computacionales, diseñar un sistema automatizado o una computadora, poder diseñar o manipular un lenguaje de programación, comprender las funciones de un sistema operativo, diseño y manipulación de sistemas inteligentes etc. La matemática, como cualquier otro lenguaje, requiere de una constante ejercitación para poder ser hábil en tal herramienta. Es fundamental que el estudiante comprenda la importancia del dominio de tal disciplina.

En un curso de Inglés se comentó, "para que aprendas Inglés necesitas: Escribir en inglés, hablar en inglés, escuchar inglés, comer inglés, dormir en inglés". Eso es muy cierto, si requiere manejar un concepto a fondo, se requiere una estrategia y ser disciplinado. No está de más decir que "para aprender matemáticas se necesita..."

M. en S. C. I. IRENE AGUILAR JUÁREZ
COORDINADORA DE INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN

CAPÍTULO





ALGEBRA

"Con números se puede demostrar cualquier cosa."

Thomas Carlyle

Factorice el máximo factor común.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $9x^4 - 3x^3 + 11x^2$ | sol. $x^2(9x^2 - 3x + 11)$ |
| 2. $80a^5b^4c - 16a^4b^2c^2 + 24a^2c$ | sol. $8a^2c(10a^3b^4 - 2a^2b^2c + 3)$ |
| 3. $3x^2y + 6x^2y^2 + 3xy$ | sol. $3xy(x + 2xy + 1)$ |
| 4. $-3r^2 - 6r + 9$ | sol. $-3(r^2 + 2r - 3)$ |
| 5. $-a^4b^2c + 5a^3bc^2 + a^2b$ | sol. $-a^2b(a^2bc - 5ac^2 - 1)$ |

Factorice por factor común.

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. $x(a + 3) + 1(a + 3)$ | sol. $(a + 3)(x + 1)$ |
| 2. $(2a + 4)(a - 3) - (2a + 4)(2a - 1)$ | sol. $-2(a + 2)^2$ |
| 3. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ | sol. $(x - 3)(x^2 + 4)$ |
| 4. $5a^3 + 15a^2 - 10a - 30$ | sol. $5(a + 3)(a^2 - 2)$ |
| 5. $c^5 - c^4 + c^3 - c^2$ | sol. $c^2(c - 1)(c^2 + 1)$ |

Factorice en forma completa cada trinomio

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $x^2 - 13x - 30$ | sol. $(x + 2)(x - 15)$ |
| 2. $3x^2 - 3x - 6$ | sol. $3(x - 2)(x + 1)$ |
| 3. $a^3b^5 - a^2b^5 - 12ab^5$ | sol. $ab^5(a - 4)(a + 3)$ |
| 4. $-2m^2 - 14m - 20$ | sol. $-2(m + 2)(m + 5)$ |
| 5. $6c^2 - 13c - 63$ | sol. $(3c + 7)(2c - 9)$ |
| 6. $8x^4y^5 + 24x^3y^5 - 32x^2y^5$ | sol. $8x^2y^5(x + 4)(x - 1)$ |
| 7. $5a^2 - 8a + 3$ | sol. $(a - 1)(5a - 3)$ |
| 8. $18a^2 + 18ab - 8b^2$ | sol. $2(3a + 4b)(3a - b)$ |
| 9. $5a^5b^2 - 8a^4b^3 + 3a^3b^4$ | sol. $a^3b^2(5a - 3b)(a - b)$ |
| 10. $x^2(x + 5) + 3x(x + 5) + 2(x + 5)$ | sol. $(x + 5)(x + 2)(x + 1)$ |

**Diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto**

Utilice la fórmula para la diferencia de dos cuadrados o la fórmula del trinomio cuadrado perfecto para factorizar cada polinomio.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $1 - 49b^2$ | sol. $(1 + 7b)(1 - 7b)$ |
| 2. $\frac{1}{100} - y^2$ | sol. $\left(\frac{1}{10} + y\right)\left(\frac{1}{10} - y\right)$ |
| 3. $0.04x^2 - 0.09$ | sol. $(0.2x + 0.3)(0.2x - 0.3)$ |
| 4. $a^2 - (3b + 2)^2$ | sol. $(a + 3b + 2)(a - 3b - 2)$ |
| 5. $49 - 14t + t^2$ | sol. $(7 - t)^2$ |
| 6. $0.81x^2 - 0.36x + 0.04$ | sol. $(0.9x - 0.2)^2$ |
| 7. $(a + b)^2 + 6(a + b) + 9$ | sol. $(a + b + 3)^2$ |
| 8. $x^2 + 6x + 9 - y^2$ | sol. $(x + 3 + y)(x + 3 - y)$ |
| 9. $9a^2 - 12ab + 4b^2 - 9$ | sol. $(3a - 2b + 3)(3a - 2b - 3)$ |
| 10. $y^4 - 6y^2 + 9$ | sol. $(y^2 - 3)^2$ |

Suma y Diferencia de cubos

Factorice mediante la fórmula para la suma o diferencia de dos cubos.

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. $a^3 + 125$ | sol. $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$ |
| 2. $64 - a^3$ | sol. $(4 - a)(16 + 4a + a^2)$ |
| 3. $p^3 - 27a^3$ | sol. $(p - 3a)(p^2 + 3ap + 9a^2)$ |
| 4. $27y^3 - 8x^3$ | sol. $(3y - 2x)(9y^2 + 6xy + 4x^2)$ |
| 5. $16a^3 - 54b^3$ | sol. $2(2a - 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ |
| 6. $x^6 + y^9$ | sol. $(x^2 + y^3)(x^4 - x^2y^3 + y^6)$ |
| 7. $(x + 1)^3 + 1$ | sol. $(x + 2)(x^2 + x + 1)$ |
| 8. $(a - b)^3 - 27$ | sol. $(a - b - 3)(a^2 - 2ab + b^2 + 3a - 3b + 9)$ |
| 9. $b^3 - (b + 3)^3$ | sol. $-9(b^2 + 3b + 3)$ |
| 10. $(m - n)^3 - (m + n)^3$ | Sol. $-2n(3m^2 + n^2)$ |

**Factorice mixtas**

Factorice mediante alguna de las fórmulas de factorización.

1. $a^4 - 4b^4$

sol. $(a^2 + 2b^2)(a^2 - 2b^2)$

2. $49 - 64x^2y^2$

sol. $(7 + 8xy)(7 - 8xy)$

3. $(x + y)^2 - 16$

sol. $(x + y + 4)(x + y - 4)$

4. $x^3 - 64$

sol. $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

5. $9x^2y^2 + 24xy + 16$

sol. $(3xy + 4)^2$

6. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

sol. $(a^2 + b^2)^2$

7. $x^2 - 2x + 1 - y^2$

sol. $(x - 1 + y)(x - 1 - y)$

8. $(x + y)^3 + 1$

sol. $(x + y + 1)(x^2 + 2xy + y^2 - x - y + 1)$

9. $(m + n)^2 - (2m - n)^2$

sol. $3m(-m + 2n)$

10. $(r + p)^3 + (r - p)^3$

sol. $r(2r^2 + 3p^2)$

**Expresiones Racionales**

Simplifique cada expresión racional.

1. $\frac{x-xy}{x}$ sol. $1 - y$

2. $\frac{5x^2-20xy}{15x}$ sol. $\frac{x-4y}{3}$

3. $\frac{x^3-x}{x^2-1}$ sol. x

4. $\frac{5r-8}{8-5r}$ sol. -1

5. $\frac{p^2-2p-24}{6-p}$ sol. $-(p + 4)$

6. $\frac{a^2-3a-10}{a^2+5a+6}$ sol. $\frac{a-5}{a+3}$

7. $\frac{8x^3-125y^3}{2x-5y}$ sol. $4x^2 + 10xy + 25y^2$

8. $\frac{(x+6)(x-3)+(x+6)(x-2)}{2(x+6)}$ sol. $\frac{2x-5}{2}$

9. $\frac{a^2+7a-ab-7b}{a^2-ab+5a-5b}$ sol. $\frac{a+7}{a+5}$

10. $\frac{x^2-x-12}{x^3+27}$ sol. $\frac{x-4}{x^2-3x+9}$



Multiplicación y División de Expresiones Racionales

Multiplique o divida como se indica. Simplifique todas las respuestas.

$$1. \left(\frac{3-r}{r-3}\right) \left(\frac{r-9}{9-r}\right)$$

sol. 1

$$2. \left(\frac{x^2+3x-10}{4x}\right) \left(\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}\right)$$

sol. $\frac{x+5}{4}$

$$3. \frac{r^2+10r+21}{r+7} \div \frac{r^2-5r-24}{r^3}$$

sol. $\frac{r^3}{r-8}$

$$4. \frac{x^2+12x+35}{x^2+4x-5} \div \frac{x^2+3x-28}{7x-7}$$

sol. $\frac{7}{x-4}$

$$5. \frac{a-b}{9a+9b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$$

sol. $\frac{(a+1)^2}{9(a+b)^2}$

$$6. \left(\frac{3x^2-x-4}{4x^2+5x+1}\right) \left(\frac{2x^2-5x-12}{6x^2+x-12}\right)$$

sol. $\frac{x-4}{4x+1}$

$$7. \left(\frac{x+2}{x^3-8}\right) \left(\frac{(x-2)^2}{x^2+4}\right)$$

sol. $\frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+2x+4)(x^2+4)}$

$$8. \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$$

sol. $\frac{x-y}{x+y}$

$$9. \frac{2x^4+4x^2}{6x^2+14x+4} \div \frac{x^2+2}{3x^2+x}$$

sol. $\frac{x^3}{x+2}$

$$10. \left(\frac{(a-b)^3}{a^3-b^3}\right) \left(\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}\right)$$

sol. $\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+ab+b^2}$

**Suma y Resta de expresiones Racionales**

1. $\frac{3x}{x+2} + \frac{5}{x+2}$ sol. $\frac{3x+5}{x+2}$

2. $\frac{7x}{x-5} - \frac{2}{x-5}$ sol. $\frac{7x-2}{x-5}$

3. $\frac{x}{x+3} + \frac{9}{x+3} - \frac{2}{x+3}$ sol. $\frac{x+7}{x+3}$

4. $\frac{5x-6}{x-8} + \frac{2x-5}{x-8}$ sol. $\frac{7x-11}{x-8}$

5. $\frac{x^2-2}{x^2+6x-7} - \frac{-4x+19}{x^2+6x-7}$ sol. $\frac{x-3}{x-1}$

6. $\frac{x^3-12x^2+45x}{x(x-8)} - \frac{x^2+5x}{x(x-8)}$ sol. $x - 5$

7. $\frac{3x^2-x}{2x^2-x-21} + \frac{2x-8}{2x^2-x-21} - \frac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21}$ sol. $\frac{x+5}{x+3}$

Mínimo común denominador.

Determine el mínimo común denominador.

1. $\frac{5}{2a^2} + \frac{9}{3a^3}$ sol. $6a^3$

2. $\frac{-4}{8x^2y^2} + \frac{7}{5x^4y^6}$ sol. $40x^4y^6$

3. $\frac{2}{3a^4b^2} + \frac{7}{2a^3b^5}$ sol. $6a^4b^5$

4. $\frac{4x}{x+3} + \frac{6}{x+9}$ sol. $(x+3)(x+9)$



5. $5z^2 + \frac{9z}{z-6}$ sol. $z - 6$
6. $\frac{x}{x^4(x-2)} - \frac{x+9}{x^2(x-2)^3}$ sol. $x^4(x-2)^3$
7. $\frac{a-2}{a^2-5a-24} + \frac{3}{a^2+11a+24}$ sol. $(a-8)(a+3)(a+8)$
8. $\frac{x}{2x^2-7x+3} + \frac{x-3}{4x^2+4x-3} - \frac{x^2+1}{2x^2-3x-9}$ sol. $(x-3)(2x-1)(2x+3)$

Sume o Reste.

1. $\frac{2}{3r} + \frac{8}{r}$ sol. $\frac{26}{3r}$
2. $\frac{5}{12x} - \frac{1}{4x^2}$ sol. $\frac{5x-3}{12x^2}$
3. $\frac{3}{8x^4y} + \frac{1}{5x^2y^3}$ sol. $\frac{15y^2+8x^2}{40x^4y^3}$
4. $\frac{b}{a-b} - \frac{a+b}{b}$ sol. $\frac{2b^2-a^2}{b(a-b)}$
5. $\frac{a}{a-b} - \frac{a}{b-a}$ sol. $\frac{2a}{a-b}$



6. $\frac{4x}{x-4} + \frac{x+3}{x+1}$

sol. $\frac{5x^2+3x-12}{(x-4)(x+1)}$

7. $\frac{3}{a+2} + \frac{3a+1}{a^2+4a+4}$

sol. $\frac{6a+7}{(a+2)^2}$

8. $\frac{x}{x^2+2x-8} + \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

sol. $\frac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x+4)(x-2)}$

9. $\frac{5x}{x^2-9x+8} - \frac{3(x+2)}{x^2-6x-16}$

sol. $\frac{2x+3}{(x-8)(x-1)}$

10. $4 - \frac{x-1}{x^2+3x-10}$

sol. $\frac{4x^2+11x-39}{(x+5)(x-2)}$

11. $\frac{3a+2}{4a+1} - \frac{3a+6}{4a^2+9a+2}$

sol. $\frac{3a-1}{4a+1}$

12. $\frac{x-y}{x^2-4xy+4y^2} + \frac{x-3y}{x^2-4y^2}$

sol. $\frac{2x^2-4xy+4y^2}{(x-2y)^2(x+2y)}$

13. $\frac{2r}{r-4} - \frac{2r}{r+4} + \frac{64}{r^2-16}$

sol. $\frac{16}{r-4}$

14. $\frac{-4}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1}$

sol. 0



$$15. \quad \frac{3}{3x-2} - \frac{1}{x-4} + 5 \qquad \text{sol.} \quad \frac{15x^2-70x+30}{(3x-2)(x-4)}$$

$$16. \quad 2 - \frac{1}{8r^2+2r-15} + \frac{r+2}{4r-5} \qquad \text{sol.} \quad \frac{18r^2+11r-25}{(4r-5)(2r+3)}$$

$$17. \quad \frac{3}{5x+6} + \frac{x^2-x}{5x^2-4x-12} - \frac{4}{x-2} \qquad \text{sol.} \quad \frac{x^2-18x-30}{(5x+6)(x-2)}$$

$$18. \quad \frac{3m}{6m^2+13mn+6n^2} + \frac{2m}{4m^2+8mn+3n^2} \qquad \text{sol.} \quad \frac{12m^2+7mn}{(2m+3n)(3m+2n)(2m+n)}$$

$$19. \quad \frac{5r-2s}{25r^2-4s^2} - \frac{2r-s}{10r^2-rs-2s^2} \qquad \text{sol.} \quad 0$$

$$20. \quad \frac{2}{2x+3y} - \frac{4x^2-6xy+9y^2}{8x^3+27y^3} \qquad \text{sol.} \quad \frac{1}{2x+3y}$$

Simplifique las expresiones racionales

$$1. \quad \frac{\frac{15a}{b^2}}{\frac{b^3}{5}} \qquad \text{sol.} \quad \frac{75a}{b^5}$$

$$2. \quad \frac{\frac{36x^4}{5y^4z^5}}{\frac{9xy^2}{15z^5}} \qquad \text{sol.} \quad \frac{12x^3}{y^6}$$

$$3. \quad \frac{\frac{10x^3y^2}{9yz^4}}{\frac{40x^4y^7}{27y^2z^8}} \qquad \text{sol.} \quad \frac{3z^4}{4xy^4}$$

$$4. \quad \frac{1-\frac{x}{y}}{3x} \qquad \text{sol.} \quad \frac{y-x}{3xy}$$



5.
$$\frac{x - \frac{x}{y}}{\frac{8+x}{y}}$$

sol.
$$\frac{x(y-1)}{8+x}$$

6.
$$\frac{x + \frac{5}{y}}{1 + \frac{x}{y}}$$

sol.
$$\frac{xy+5}{y+x}$$

7.
$$\frac{\frac{2}{a} + \frac{1}{2a}}{a + \frac{a}{2}}$$

sol.
$$\frac{5}{3a^2}$$

8.
$$\frac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{b^2}{a} - a}$$

sol.
$$-\frac{a}{b}$$

9.
$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x+y}}$$

sol.
$$\frac{x-y}{y}$$

10.
$$\frac{\frac{a}{b} - 6}{\frac{-a}{b} + 6}$$

sol.
$$-1$$

11.
$$\frac{\frac{4x+8}{3x^2}}{\frac{4x^3}{9}}$$

sol.
$$\frac{3(x+2)}{x^5}$$

12.
$$\frac{\frac{a}{a+1} - 1}{\frac{2a+1}{a-1}}$$

sol.
$$\frac{-a+1}{(a+1)(2a+1)}$$

13.
$$\frac{1 + \frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-1}}$$

sol.
$$\frac{x-1}{x+1}$$



14.
$$\frac{\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}}{\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}}$$
 sol. $\frac{a^2+1}{2a}$
15.
$$\frac{\frac{5}{3-x} + \frac{6}{x-5}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{x-5}}$$
 sol. $\frac{x}{5(x-3)}$
16.
$$\frac{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2}}{\frac{1}{x}}$$
 sol. $\frac{x^2+5x-6}{x(x-2)}$
17.
$$\frac{\frac{2}{a^2-3a+2} + \frac{2}{a^2-a-2}}{\frac{2}{a^2-1} + \frac{2}{a^2+4a+3}}$$
 sol. $\frac{a(a+3)}{(a-2)(a+1)}$
18. $2a^{-2} + b$ sol. $\frac{2+a^2b}{a^2}$
19. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$ sol. $\frac{ab}{b+a}$
20. $\frac{a^{-1}+1}{b^{-1}-1}$ sol. $\frac{b(1+a)}{a(1-b)}$
21. $\frac{a^{-2}-ab^{-1}}{ab^{-2}+a^{-1}b^{-1}}$ sol. $\frac{b^2-a^3b}{a^3+ab}$
22. $\frac{\frac{9a}{b}+a^{-1}}{\frac{b}{a}+a^{-1}}$ sol. $\frac{9a^2+b}{b(b+1)}$
23. $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}}$ sol. $\frac{(a+b)^2}{ab}$
24. $5x^{-1} - (3y)^{-1}$ sol. $\frac{15y-x}{3xy}$



25.
$$\frac{\frac{2}{xy} - \frac{8}{y} + \frac{5}{x}}{3x^{-1} - 4y^{-2}}$$

sol.
$$\frac{2y - 8xy + 5y^2}{3y^2 - 4x}$$

LEYES DE LOS EXPONENTES Y RADICALES

a) $x^1 = x$

b) $x^0 = 1$

c) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

d) $x^m x^n = x^{m+n}$

e) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

f) $(x^m)^n = x^{mn}$

g) $(xy)^n = x^n y^n$

h) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

i) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

j) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

k) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$

l) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

m) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

Radicales

En este conjunto de ejercicios supondremos que todas las variables representan números reales positivos. Escriba cada expresión en forma exponencial.

1. $\sqrt{a^3}$

sol. $a^{\frac{3}{2}}$

2. $\sqrt{9^5}$

sol. $9^{\frac{5}{2}}$

3. $(\sqrt[3]{y})^{14}$

sol. $y^{\frac{14}{3}}$

4. $\sqrt[4]{a^3 b}$

sol. $(a^3 b)^{\frac{1}{4}}$

5. $\sqrt[5]{\frac{2x^6}{11y^7}}$

sol. $\left(\frac{2x^6}{11y^7}\right)^{\frac{1}{5}}$



Escriba cada expresión en forma radical.

1. $a^{1/2}$

sol. \sqrt{a}

2. $18^{5/3}$

sol. $\sqrt[3]{18^5}$

3. $(24x^3)^{1/2}$

sol. $\sqrt{24x^3}$

4. $(11b^2c)^{3/5}$

sol. $(\sqrt[5]{11b^2c})^3$

5. $(b^3 - d)^{-1/3}$

sol. $\frac{1}{\sqrt[3]{b^3-d}}$

Simplifique cada expresión radical, cambiándola a forma exponencial. Cuando sea apropiado, escriba la respuesta en forma radical.

1. $\sqrt[6]{y^3}$

sol. \sqrt{y}

2. $(\sqrt{19.3})^2$

sol. 19.3

3. $(\sqrt[3]{xy^2})^{15}$

sol. x^5y^{10}

4. $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$

sol. $\sqrt[8]{y}$

5. $\sqrt{\sqrt[5]{a^9}}$

sol. $\sqrt[10]{a^9}$

Simplifique. Escriba la respuesta en forma exponencial sin exponentes negativos.

1. $(9^{-1/3})^0$

sol. 1

2. $\frac{5y^{-1/3}}{60y^{-2}}$

sol. $\frac{y^{5/3}}{12}$

3. $4x^{5/3}3x^{-7/2}$

sol. $\frac{12}{x^{11/6}}$

4. $\left(\frac{22x^{3/7}}{2x^{1/2}}\right)^2$

sol. $\frac{121}{x^{1/7}}$

5. $\left(\frac{x^{3/4}y^{-3}}{x^{1/2}y^2}\right)^4$

sol. $\frac{x}{y^{20}}$



Multiplique.

1. $4z^{-1/2}(2z^4 - z^{1/2})$

sol. $8z^{7/2}$

2. $5x^{-1}(x^{-4} + 4x^{-1/2})$

sol. $\frac{5}{x^5} + \frac{20}{x^{3/2}}$

3. $-6x^{5/3}(-2x^{1/2} + 3x^{1/3})$

sol. $12x^{13/6} - 18x^2$

En este conjunto de ejercicios, suponga que todas las variables representan números reales positivos. Simplifique.

1. $\sqrt[3]{b^9}$

sol. b^3

2. $\sqrt[3]{x^6}$

sol. x^2

3. $\sqrt{x^3}$

sol. $x\sqrt{x}$

4. $\sqrt{a^{11}}$

sol. $a^5\sqrt{a}$

5. $8\sqrt[3]{z^{32}}$

sol. $8z^{10}\sqrt[3]{z^2}$

6. $\sqrt[4]{32x^8y^9z^{19}}$

sol. $2x^2y^2z^4\sqrt[4]{2yz^3}$

7. $\sqrt[4]{81a^8b^9}$

sol. $3a^2b^2\sqrt[4]{b}$

8. $\sqrt[5]{32a^{10}b^{12}}$

sol. $2a^2b^2\sqrt[5]{b^2}$

Simplifique.

1. $\sqrt{\frac{75}{3}}$

sol. 5

2. $\sqrt{\frac{81}{100}}$

sol. $\frac{9}{10}$

3. $\sqrt{\frac{r^4}{4}}$

sol. $\frac{r^2}{2}$



3. $\sqrt{\frac{r^4}{4}}$

sol. $\frac{r^2}{2}$

4. $\sqrt{\frac{16x^4}{25y^{10}}}$

sol. $\frac{4x^2}{5y^5}$

5. $\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}}$

sol. $\frac{c^2}{4}$

6. $\sqrt[3]{\frac{a^8b^{12}}{b^{-8}}}$

sol. $a^2b^6\sqrt[3]{a^2b^2}$

7. $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$

sol. $2\sqrt{2}$

8. $\frac{\sqrt{27x^6}}{\sqrt{3x^2}}$

sol. $3x^2$

9. $\frac{\sqrt{48x^6y^9}}{\sqrt{6x^2y^6}}$

sol. $2x^2y\sqrt{2y}$

10. $\sqrt[3]{\frac{5xy}{8x^{13}}}$

sol. $\frac{\sqrt[3]{5y}}{2x^4}$

11. $\sqrt[3]{\frac{25x^2y^9}{5x^8y^2}}$

sol. $\frac{y^2\sqrt[3]{5y}}{x^2}$

12. $\sqrt[4]{\frac{10x^4y}{81x^{-8}}}$

sol. $\frac{x^3\sqrt[4]{10y}}{3}$

Simplifique.

1. $\sqrt{500xy^2} + y\sqrt{320x}$

sol. $18y\sqrt{5x}$

2. $2\sqrt{5x} - 3\sqrt{20x} - 4\sqrt{45x}$

sol. $-16\sqrt{5x}$

3. $3\sqrt{50a^2} - 3\sqrt{72a^2} - 8a\sqrt{18}$

sol. $-27a\sqrt{2}$

4. $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32}$

sol. $5\sqrt[3]{4}$

5. $\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{8}$

sol. -7

6. $2\sqrt[3]{a^4b^2} + 4a\sqrt[3]{ab^2}$

sol. $6a\sqrt[3]{ab^2}$



7. $\sqrt{4r^7s^5} + 3r^2\sqrt{r^3s^5} - 2rs\sqrt{r^5s^3}$ sol. $3r^3s^2\sqrt{rs}$
8. $\sqrt[3]{128x^8y^{10}} - 2x^2y^3\sqrt{16x^2y^7}$ sol. 0
9. $\sqrt{3}\sqrt{27}$ sol. 9
10. $\sqrt[3]{4^3}\sqrt{14}$ sol. $2^3\sqrt{7}$
11. $\sqrt{9m^3n^7}\sqrt{3mn^4}$ sol. $3m^2n^5\sqrt{3n}$
12. $\sqrt[3]{9x^7y^{10}}\sqrt[3]{6x^4y^3}$ sol. $3x^3y^4\sqrt[3]{2x^2y}$
13. $\sqrt[5]{x^{24}y^{30}z^{95}}\sqrt{x^{13}y^8z^7}$ sol. $x^7y^7z^3\sqrt{x^2y^3z}$
14. $(\sqrt[3]{2x^3y^4})^2$ sol. $x^2y^2\sqrt[3]{4y^2}$
15. $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ sol. $5 - \sqrt{15}$
16. $\sqrt[3]{y}(2\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^8})$ sol. $2^3\sqrt[3]{y^2} - y^3$
17. $2\sqrt[3]{x^4y^5}(\sqrt[3]{8x^{12}y^4} + \sqrt[3]{16xy^9})$ sol. $4x^5y^3\sqrt[3]{x} + 4xy^4\sqrt[3]{2x^2y^2}$
18. $(8 + \sqrt{5})(8 - \sqrt{5})$ sol. 59
19. $(\sqrt{6} + x)(\sqrt{6} - x)$ sol. $6 - x^2$
20. $(\sqrt{7} - \sqrt{z})(\sqrt{7} + \sqrt{z})$ sol. $7 - z$
21. $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} + 5)$ sol. $23 + 9\sqrt{3}$
22. $(3 - \sqrt{2})(4 - \sqrt{8})$ sol. $16 - 10\sqrt{2}$
23. $(4\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ sol. $10 - 3\sqrt{6}$
24. $(2\sqrt{5} - 3)^2$ sol. $29 - 12\sqrt{5}$
25. $(2\sqrt{3x} - \sqrt{y})(3\sqrt{3x} + \sqrt{y})$ sol. $18x - \sqrt{3xy} - y$
26. $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{36})$ sol. $8 - 2^3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$
27. $\sqrt[6]{128ab^{17}c^9}$ sol. $2b^2c^6\sqrt[6]{2ab^5c^3}$
28. $2b^4\sqrt{a^4b} + ab^4\sqrt{16b}$ sol. $4ab^4\sqrt{b}$
29. $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2})$ sol. $x - 2^3\sqrt{x^2y^2} - \sqrt[3]{xy} + 2y$
30. $\sqrt[3]{3ab^2(\sqrt[3]{4a^4b^3} - \sqrt[3]{8a^5b^4})}$ sol. $b\sqrt[3]{3a^2\sqrt[3]{4a} - 6a^2\sqrt[3]{a^2b}}$



Simplifique. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

1. $\frac{1}{\sqrt{z}}$

sol. $\frac{\sqrt{z}}{z}$

2. $\frac{p}{\sqrt{2}}$

sol. $\frac{p\sqrt{2}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{7}}$

sol. $\frac{\sqrt{7y}}{y}$

4. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

sol. $3\sqrt{2}$

5. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

sol. $\frac{\sqrt{xy}}{y}$

6. $\sqrt{\frac{5m}{8}}$

sol. $\frac{\sqrt{10m}}{4}$

7. $\frac{2n}{\sqrt{18n}}$

sol. $\frac{\sqrt{2n}}{3}$

8. $\sqrt{\frac{18x^4y^3}{2z^3}}$

sol. $\frac{3x^2y\sqrt{yz}}{z^2}$

9. $\sqrt{\frac{20y^4z^3}{3xy^{-4}}}$

sol. $\frac{2y^4z\sqrt{15xy}}{3x}$

10. $\sqrt{\frac{48x^6y^5}{3z^3}}$

sol. $\frac{4x^3y^2\sqrt{yz}}{z^2}$



Simplifique.

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

sol. $\frac{\sqrt[4]{27}}{3}$

2. $\frac{a}{\sqrt[4]{8}}$

sol. $\frac{a\sqrt[4]{2}}{2}$

3. $\frac{5}{\sqrt[4]{z^2}}$

sol. $\frac{5\sqrt[4]{z^2}}{z}$

4. $\frac{10}{\sqrt[5]{y^3}}$

sol. $\frac{10\sqrt[5]{y^2}}{y}$

5. $\frac{2}{\sqrt[7]{a^4}}$

sol. $\frac{2\sqrt[7]{a^3}}{a}$

6. $\sqrt[3]{\frac{1}{2x}}$

sol. $\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{2x}$

7. $\frac{5m}{\sqrt[4]{2}}$

sol. $\frac{5m\sqrt[4]{8}}{2}$

8. $\sqrt[4]{\frac{5}{3x^3}}$

sol. $\frac{\sqrt[4]{135x}}{3x}$

9. $\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^2}}$

sol. $\frac{\sqrt[3]{12x^2y}}{2y}$

10. $\sqrt[3]{\frac{14xy^2}{2z^2}}$

sol. $\frac{\sqrt[3]{7xy^2z}}{z}$



Simplifique mediante la racionalización del denominador.

$$1. \frac{3}{6+\sqrt{x}}$$

$$\text{sol. } \frac{18-3\sqrt{x}}{36-x}$$

$$2. \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$$

$$\text{sol. } \frac{4x+4y\sqrt{x}}{x-y^2}$$

$$3. \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$$

$$\text{sol. } \frac{-13+3\sqrt{6}}{23}$$

$$4. \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{a^7}}{\sqrt{a}}$$

$$\text{sol. } a + a^3$$

$$5. \frac{4}{\sqrt{x+2}-3}$$

$$\text{sol. } \frac{4\sqrt{x+2}+12}{x-7}$$

Simplifique.

$$1. \sqrt{\frac{x}{16}}$$

$$\text{sol. } \frac{\sqrt{x}}{4}$$

$$2. \sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$\text{sol. } \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$3. (\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})$$

$$\text{sol. } 1$$

$$4. \sqrt{\frac{24x^3y^6}{5z}}$$

$$\text{sol. } \frac{2xy^3\sqrt{30xz}}{5z}$$

$$5. \sqrt{\frac{28xy^4}{2x^3y^4}}$$

$$\text{sol. } \frac{\sqrt{14}}{x}$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{a}+7}$$

$$\text{sol. } \frac{\sqrt{a}-7}{a-49}$$

$$7. -\frac{7\sqrt{x}}{\sqrt{98}}$$

$$\text{sol. } -\frac{\sqrt{2x}}{2}$$



8. $\sqrt[4]{\frac{3y^2}{2x}}$

sol. $\frac{\sqrt[4]{24x^3y^2}}{2x}$

9. $\sqrt[3]{\frac{32y^{12}z^{10}}{2x}}$

sol. $\frac{2y^4x^3\sqrt[3]{2x^2z}}{x}$

10. $\frac{\sqrt{ar}}{\sqrt{a}-2\sqrt{r}}$

sol. $\frac{a\sqrt{r}+2r\sqrt{a}}{a-4r}$

11. $\frac{\sqrt[3]{6x}}{\sqrt[3]{5xy}}$

sol. $\frac{\sqrt[3]{150y^2}}{5y}$

12. $\sqrt[4]{\frac{2x^7y^{12}z^4}{3x^9}}$

sol. $\frac{y^3z^4\sqrt[4]{54x^2}}{3x}$

13. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

sol. $\sqrt{2}$

14. $\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}$

sol. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

15. $4\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{24}$

sol. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

16. $5\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{8}} + \sqrt{50}$

sol. $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

$$17. \quad \sqrt{\frac{1}{2}} + 7\sqrt{2} + \sqrt{18}$$

$$\text{sol. } \frac{21\sqrt{2}}{2}$$

$$18. \quad \frac{2}{\sqrt{50}} - 3\sqrt{50} - \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\text{sol. } -\frac{301\sqrt{2}}{20}$$

$$19. \quad \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{sol. } \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$20. \quad -2\sqrt{\frac{x}{y}} + 3\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\text{sol. } \left(-\frac{2}{y} + \frac{3}{x}\right)\sqrt{xy}$$

$$21. \quad \frac{3}{\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{9}{a}} + 2\sqrt{a}$$

$$\text{sol. } 2\sqrt{a}$$

$$22. \quad \frac{\sqrt{(a+b)^4}}{\sqrt[3]{a+b}}$$

$$\text{sol. } \sqrt[3]{(a+b)^5}$$

**Simplifica la expresión.**

- 1) $(2x^2 - 3x + 1)(4)(3x + 2)^3(3) + (3x + 2)^4(4x - 3)$
- 2) $(6x - 5)^3(2)(x^4 + 4)(2x) + (x^2 + 4)^2(3)(6x - 5)^2(6)$
- 3) $(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}(3)(2x + 1)^2(2) + (2x + 1)^3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}(2x)$
- 4) $(3x + 2)^{\frac{1}{3}}(2)(4x - 5)(4) + (4x - 5)^2\left(\frac{1}{3}\right)(3x + 2)^{-\frac{2}{3}}(3)$
- 5) $(3x + 1)^6\left(\frac{1}{2}\right)(2x - 5)^{-\frac{1}{2}}(2) + (2x - 5)^{\frac{1}{2}}(6)(3x + 1)^5(3)$
- 6) $(x^2 + 9)^4\left(-\frac{1}{2}\right)(x + 6)^{-\frac{4}{3}} + (x + 6)^{-\frac{1}{3}}(4)(x^2 + 9)^3(2x)$
- 7)
$$\frac{(6x+1)^3(27x^2+2)-(9x^3+2x)(3)(6x+1)^2(6)}{(6x-1)^6}$$
- 8)
$$\frac{(x^2-1)^4(2x)-x^2(4)(x^2-1)^3(2x)}{(x^2-1)^8}$$
- 9)
$$\frac{(x^2+2)^3(2x)-x^2(3)(x^2+2)^2(2x)}{[(x^2+2)^3]^5}$$
- 10)
$$\frac{(x^2-5)^4(3x^2)-x^3(4)(x^2-5)^3(2x)}{[(x^2-5)^4]^2}$$
- 11)
$$\frac{(x^2+4)^{\frac{1}{3}}(3)-(3x)\left(\frac{1}{3}\right)(x^2+4)^{-\frac{2}{3}}(2x)}{\left[(x^2+4)^{\frac{1}{3}}\right]^3}$$
- 12)
$$\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(2x)-x^2\left(\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$
- 13)
$$\frac{(4x^2+9)^{\frac{1}{2}}(2)-(2x+3)\left(\frac{1}{2}\right)(4x^2+9)^{-\frac{1}{2}}(8x)}{\left[(4x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$
- 14)
$$\frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)(2x+3)^{-\frac{2}{3}}(2)-(2x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)(3x+2)^{-\frac{1}{2}}(3)}{\left[(3x+2)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

CAPÍTULO





FUNCIONES Y LÍMITES

“Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad.”

Albert Einstein

Desigualdades

Encontrar el conjunto de todos los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad dada y expresar la solución en forma de intervalo.

1. $\frac{5}{3}x - 4 < 2 - \frac{4}{3}x$ sol. $x \in (-\infty, 2)$
2. $\frac{1}{2}(x + 2) \geq 3 - x$ sol. $x \in [\frac{4}{3}, \infty)$
3. $\frac{4x}{5} + 7 > \frac{x}{2} + 3$ sol. $x \in (-\frac{40}{3}, \infty)$
4. $3x - 5 \leq \frac{3}{4}x + \frac{4-x}{3}$ sol. $x \in (-\infty, \frac{76}{31}]$
5. $\frac{x-6}{3} > 4 - x$ sol. $x \in (\frac{9}{2}, \infty)$
6. $x - 6 > 12 - 3x$ sol. $x \in (\frac{9}{2}, \infty)$
7. $3x - 4 \leq \frac{3x}{4} + \frac{1-x}{3}$ sol. $x \in (-\infty, \frac{52}{31}]$
8. $2x > 5 - \frac{4}{3}x$ sol. $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$
9. $2x < 5 - \frac{4}{3}x$ sol. $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$
10. $3 - \frac{6-4x}{2} < 8$ sol. $x \in (-\infty, 4)$
11. $\frac{3x}{2} - \frac{4}{3} \geq 2 - 2x$ sol. $x \in [\frac{20}{21}, \infty)$
12. $2 \leq 5 + 2x < 11$ sol. $x \in [-\frac{3}{2}, 3)$
13. $-4 \leq 2 - 3x \leq 2$ sol. $x \in [0, 2]$



14. $-1 < 4 - 5x < 7$

sol. $x \in (-\frac{3}{5}, 1)$

15. $1 \leq 3 - 2\frac{x}{3} \leq 3$

sol. $x \in [0, 3]$

16. $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$

sol. $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$

17. $\frac{3}{x} - \frac{1}{4} > \frac{1}{x} + 1$

sol. $x \in (-\infty, \frac{8}{5})$

18. $\frac{8}{3-x} \leq 2$

sol. $x \in (-\infty, -1] \cup (3, \infty)$

19. $\frac{4}{2-3x} \geq 5$

sol. $x \in [\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

20. $\frac{4}{2-3x} \leq 5$

sol. $x \in (-\infty, \frac{2}{5}] \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

21. $\frac{X+2}{X-3} \leq 5$

sol. $X \in (-\infty, 3) \cup [\frac{17}{4}, \infty)$ o bien $X \notin [3, \frac{17}{4})$

22. $\frac{2x+5}{x-5} > 0$

sol. $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup (5, \infty)$

23. $\frac{x-4}{x-6} \geq 1$

sol. $x \in (6, \infty)$

24. $\frac{x-8}{3-x} < 0$

sol. $x \in (-\infty, 3) \cup (8, \infty)$

25. $\frac{2x+3}{x^2-x-2} > 0$

sol. $x \in (-\frac{3}{2}, -1) \cup (2, \infty)$

26. $\frac{2}{x^2-x-2} < 0$

sol. $x \in (-1, 2)$

27. $x^2 - x - 2 > 0$

sol. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ o bien $X \notin [-1, 2]$



28. $\frac{x^2-6x-7}{x+5} \geq 0$ sol. $x \in (-5, -1] \cup [7, \infty)$
29. $6x^2 + 11x \geq -3$ sol. $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$ o bien $x \notin \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
30. $3x^2 + 5x \geq 2$ sol. $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$
31. $x^2 - 3x - 40 \geq 0$ sol. $x \in (-\infty, -5] \cup [8, \infty)$
32. $x^2 - 7x + 10 < 0$ sol. $x \in (2, 5)$
33. $6x^2+11x-10<0$ sol. $x \in (-5/2, 2/3)$
34. $9x^2+12x+4>0$ sol. $x \in (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, \infty)$
35. $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$ sol. $x = 5/2$
36. $3x + 2 < 0$ sol. $x \in (-\infty, 2)$
37. $3x^2 - x + 4 < 0$ sol. $x \in (-\infty, \infty)$
38. $x^3 - x + 4 < 0$ sol. $x \in (-\infty, -9/5]$
39. $3x^3 + x^2 \geq 0$ sol. $x \in [-1, \infty)$
40. $8x^3 - 2x^2 - 15x > 0$ sol. $x \in (-5/4, 0) \cup [3/2, \infty)$
41. $36x^3 - 7x + 1 \leq 0$ sol. $x \in (-\infty, -1/2] \cup [1/6, 1/3]$
42. $8x^3 - 27 > 0$ sol. $x \in (3/2, \infty)$
43. $x^3 + 11x^2 + 10x - 72 > 0$ sol. $x \in (-9, -4) \cup (2, \infty)$
44. $|5 - 7x| < 3$ sol. $x \in (2/7, 8/7)$
45. $|3x - 7| < 4$ sol. $x \in (1, 11/3)$
46. $|2x - 3| > 7$ sol. $x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$
47. $|4 - 5x| \leq 2$ sol. $x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$
48. $|7 - 4x| \geq 3$ sol. $x \in (-\infty, 1] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$
49. $\left|3 + \frac{5}{x}\right| \geq 8$ sol. $x \in \left[-\frac{5}{11}, 0\right) \cup (0, 1]$
50. $\left|4 - \frac{1}{x}\right| < 1$ sol. $x \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$
51. $|3 - x| \leq |2x + 3|$ sol. $x \in (-\infty, -6] \cup [0, \infty)$ o bien $x \notin (-6, 0)$
52. $|3 - x| \geq |2x + 3|$ sol. $x \in [-6, 0]$
53. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| > 4$ sol. $x \in \left(\frac{10}{9}, 2\right)$



54. $|\frac{x+7}{9x-5}| \leq 2$

sol. $x \in (-\infty, \frac{3}{19}] \cup [1, \infty)$

55. $-2 \leq |x+4| \leq 9$

sol. $x \in [-13, -6] \cup [-2, 5]$

56. $-3 \leq |2x+3| < 3$

sol. $x \in (-3, 0)$

57. $-5 < |3-x| \leq 8$

sol. $x \in [-5, 11]$

58. $-8 < |x-2| < 2$

sol. $x \in (0, 4)$

59. $-1 \leq |2x-5| < 10$

sol. $x \in (-\frac{15}{2}, \frac{5}{2})$

Determinar el conjunto de los números X para los cuales la raíz cuadrada es un número real

1. $\sqrt{x+9}$

sol. $X \in [-9, \infty]$

2. $\sqrt{16-7x}$

sol. $X \in (-\infty, \frac{16}{7}]$

3. $\sqrt{3-\frac{2}{3}x}$

sol. $(-\infty, \frac{9}{2}]$

4. $\sqrt{x^2-6x}$

sol. $X \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$

5. $\sqrt{x^2-81}$

sol. $X \in (-\infty, -9] \cup [9, \infty)$

6. $\sqrt{16-x^2}$

sol. $X \in [-4, 4]$

7. $\sqrt{36-x^2}$

sol. $X \in [-6, 6]$

8. $\sqrt{x^2-4x-21}$

sol. $X \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

9. $\sqrt{x^2-5x+4}$

sol. $X \in (-\infty, 1] \cup [4, \infty)$

10. $\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}$

sol. $X \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

11. $\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$

sol. $X \in (-\infty, -3) \cup [3, \infty)$

**RELACIONES**

Dadas las siguientes relaciones, determine el conjunto imagen, grafique y diga si es función.

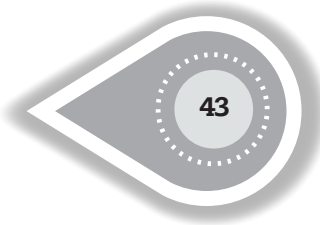
1.- $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}; A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3, 3]\}; \phi = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9; x \in A, y \in \mathbb{R}\}$

2.- $\delta : A \rightarrow \mathbb{R}; A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-2, 2]\}; \delta = \{(x, y) \mid y^2 = 9 - x^2; x \in A, y \in \mathbb{R}\}$

3.- $\delta : \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}; x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, y \in \mathbb{R}\}$

4.- $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}; A = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}; \phi = \{(x, y) \mid y^2 = x; x \in A, y \in \mathbb{R}\}$

5.- $\tau : A \rightarrow \mathbb{R}; A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \tau = \{(x, y) \mid y^2 - 1 = x; x \in A, y \in \mathbb{R}\}$



DOMINIO Y RANGO

Dadas las siguientes funciones; encontrar el dominio, el rango y grafique cada una de ellas.

1. $f(x) = 3 - x$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = 3x - 2$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = 3/7 x - 4$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in \mathbb{R}$

4. $f(x) = -(4 + x^2)$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in (-\infty, -4)$

5. $f(x) = x^2 - 3$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in (-3, \infty)$

6. $f(x) = 3 - 2x^2$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in (-\infty, 3)$

7. $f(x) = x^2 + x$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in (-1/4, \infty)$

8. $f(x) = -x^2 - x$

sol. $D: x \in \mathbb{R}$ $Ran: y \in (-\infty, 1/4)$

9. $f(x) = \frac{3}{x-3}$

sol. $D: x \in \mathbb{R} - \{3\}$ $Ran: y \in \mathbb{R} - \{0\}$

10. $h(x) = \frac{5}{x+7}$

sol. $D: x \in \mathbb{R} - \{-7\}$ $Ran: y \in \mathbb{R} - \{0\}$

11. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

sol. $D: x \in \mathbb{R} - \{2\}$ $Ran: y \in \mathbb{R} - \{1\}$

12. $y = \frac{x}{2x-1}$

sol. $x \in \mathbb{R} - \{1/2\}$ $Ran: y \in \mathbb{R} - \{1/2\}$

13. $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-3}$

sol. $D: x \in \mathbb{R} - \{3\}$ $Ran: y \in [0, \infty)$

14. $h(x) = \frac{x^4+x^3-9x^2-3x+18}{x^2+x-6}$

sol. $D: x \in \mathbb{R} - \{-3, 2\}$ $Ran: y \in [-3, \infty)$

15. $f(x) = \frac{x^2+25}{x-5}$

sol. $D: x \in \mathbb{R} - \{5\}$ $Ran: y \in \left(-\infty, -\frac{292849}{70700}\right] \cup \left[\frac{1706849}{70700}, \infty\right)$

16. $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$

sol. $D: x \in (0, \infty)$ $Ran: y \in (2, \infty)$

17. $f(x) = \frac{x}{3-\frac{1}{x}}$

sol. $x \in (-\infty, 1/3) \cup (1/3, \infty)$ $Ran: y \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{9}{20}, \infty\right)$

18. $f(x) = \sqrt{25 - 7x}$

sol. $D: x \in (-\infty, 25/7)$ $Ran: y \in [0, \infty)$

19. $f(x) = \sqrt{7x - 25}$

sol. $D: x \in [25/7, \infty)$ $Ran: y \in [0, \infty)$

20. $g(x) = \sqrt{3x - 4}$

sol. $D: x \in [4/3, \infty)$ $Ran: y \in [0, \infty)$

21. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

sol. $D: x \in (-\infty, \infty)$ $Ran: y \in [3, \infty)$

22. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

sol. $D: x \in (-\infty, \infty)$, $Ran: y \in [9, \infty)$

23. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

Sol. $D: x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$



24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ sol. $D: x \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
25. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ Sol. $D: x \in [-5, 5]$, $Ran: y \in [0, 5]$
26. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 21}$ Sol. $D: x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
27. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ Sol. $D: x \in (-\infty, -1) \cup [4, \infty)$, $Ran: y \in (0, \infty)$
28. $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ Sol. $D: x \in (-\infty, 1] \cup [4, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
29. $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ Sol. $D: x \in (-\infty, -3] \cup (3, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
30. $\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}}$ Sol. $D: x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
31. $\sqrt{\frac{x+1}{x-7}}$ Sol. $D: x \in (-\infty, -1) \cup [7, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
32. $\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$ Sol. $D: x \in (-3, 3]$, $Ran: y \in [0, \infty)$
33. $f(x) = 4 - \sqrt{x}$ Sol. $D: x \in [0, \infty)$, $Ran: y \in (-\infty, 4]$
34. $f(x) = 7 - \sqrt{4 - x^2}$ Sol. $D: x \in [-2, 2]$, $Ran: y \in [5, 7]$
35. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3x - 2}$ Sol. $D: x \in [\frac{2}{3}, \infty)$, $Ran: y \in [\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$
36. $f(x) = 2 + x^{2/3}$ Sol. $D: x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [2, \infty)$
37. $y = |3x + 2|$ Sol. $D: x \in (-\infty, \infty)$, $Ran: y \in [0, \infty)$
38. $y = |5 - 2x|$ Sol. $D: x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [0, \infty)$
39. $y = |2 - \frac{3}{2}x|$ Sol. $D: x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [0, \infty)$
40. $y = |x| - 2$ Sol. $D: x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [-2, \infty)$
41. $y = 3 - |1 + 2x|$ Sol. $D: x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [-\infty, 3]$
42. $y = |5 - 3x| + 2$ Sol. $D: x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [2, \infty)$

$$43. f(x) = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3} & ; x \neq -3 \\ 3 & ; x = -3 \end{cases} \quad \text{Sol. } D: x \in \mathbf{R}, \text{ } Ran: y \in \{-1, 1, 3\}$$

$$44. f(x) = \begin{cases} \frac{|3-2x|}{3-2x} & ; x \neq \frac{3}{2} \\ 2 & ; x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Sol. } D: x \in \mathbf{R}, \text{ } Ran: y \in \{-1, 1, 2\}$$



$$45. f(x) = \begin{cases} \frac{4+x}{|4+x|} & ; x \neq -4 \\ -4 & ; x = -4 \end{cases}$$

Sol.D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in \{1, -1, -4\}$

$$46. f(x) = \begin{cases} \frac{|5-3x|}{5-3x} & ; x \neq \frac{5}{3} \\ 3 & ; x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in \{-1, 1, 3\}$

$$47. f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq -1 \\ x^3 & ; |x| < 1 \\ 2x & ; x \geq 1 \end{cases}$$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [0, \infty)$

$$48. f(x) = \begin{cases} -5 & ; x < -5 \\ x & ; x \in [-5, 5] \\ 5 & ; x > 5 \end{cases}$$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [-5, 5]$

49. $y = \ln(3x + 1)$

Sol. D: $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$, $Ran: y \in (-4, \infty)$

50. $y = e^{2x-1}$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [0, \infty)$

51. $y = \sin(2x)$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: [-1, 1]$

52. $y = 3 \cos(x^2)$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [-3, 3]$

53. $y = \tan(3x)$

Sol. D: $x \in \mathbf{R} - \{\dots -1.5, -0.5, 0.5, 1.5 \dots\}$, $Ran: y \in \mathbf{R}$

54. $y = 2 \cot x$

Sol. D: $x \in \mathbf{R} - \{\dots -6, -3, 0, 3, 6 \dots\}$, $Ran: y \in \mathbf{R}$

55. $y = 2 \cos(3x)$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [-2, 2]$

56. $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

Sol. D: $x \in \mathbf{R}$, $Ran: y \in [-1, 1]$


OPERACIONES CON FUNCIONES

1. Dada $f(x)=3x^2 - 2x + 1$, calcular: $f(-2)$ y $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; $h \neq 0$

Sol. $f(-2)=17$

Sol. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 6x + 3h - 2$

2. Dada $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$, encontrar $f(-1)$, $f(2x^2 + 3)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; $h \neq 0$

Sol. $\sqrt{5}$

Sol. $\sqrt{8x^4 + 24x^2 + 21}$

Sol. $\frac{4x+2h}{(\sqrt{2x^2+4xh+2h^2+3})+\sqrt{2x^2+3}}$

3. Dada $f(t) = \frac{3t+2}{2t+3}$, hallar $f(-4)$, $f(-3)$, $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, $h \neq 0$

Sol(a). 2

Sol(b). $\frac{7}{3}$

Sol(c). $\frac{5}{(2t+2h+3)(2t+3)}$

4. Dada $g(x)=\sqrt{x-1} + 2x$, encontrar $g(1)$, $g(x-1)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$; $h \neq 0$

Sol(a). 2

Sol(b). $\sqrt{x-2} + 2x - 2$

Sol(c). $\frac{1 + 2\sqrt{x+h-1} + 2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}$

5. Dada $k(x)=2x^2 + 4x - 3$; hallar $k(x^2)$, $k(0)$; $\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$; $h \neq 0$

Sol(a). $2x^4 + 4x^2 - 3$

Sol(b). -3

Sol(c). $4x+2h+4$



Dadas las funciones f y g . Encontrar $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g , $f \circ g$; así como los respectivos dominios.

1. $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$, $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x+3}$
3. $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$
4. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$, $g(x) = 3x - 2$

FUNCIONES INVERSAS

Encuentre la función inversa de cada una de las siguientes funciones (Si es que existe):

1. $f(x) = 5 + 7x$ sol. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{7}$;
2. $y = 9 - 2x$ sol. $f^{-1}(x) = \frac{-(x-9)}{2}$
3. $f(x) = x^2 + 7; x \geq 0$ sol. $f(x) = \sqrt{x-7}$
4. $f(x) = 5 - x^2$ sol. $f^{-1}(x) = \sqrt{-x+5}$
5. $f(x) = \sqrt{3x-2}; x \geq 2/3$ sol. $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$
6. $f(x) = \sqrt{2-3x}; x \leq 2/3$ sol. $f^{-1}(x) = \frac{-x^2+2}{3}$
7. $f(x) = \frac{5}{x-3}; x > 3$ sol. $f^{-1}(x) = \frac{5}{x} + 3$
8. $f(x) = \sqrt{4-9x^2}; x \in [0, 1/3]$ sol. $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-x^2+4}{9}}$



9. $f(x) = \frac{4}{2-x}; x < 2$

sol. $f^{-1}(x) = -\frac{4}{x} + 2$

10. $f(x) = x^3 - 2$

sol. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

11. $f(x) = \sqrt{3x-2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3} \quad x \geq \frac{2}{3}$

12. $f(x) = \sqrt{2-3x}$

$f^{-1}(x) = \frac{-x^2+2}{3} \quad x \leq \frac{2}{3}$

13. $f(x) = \frac{5}{x-3}$

$f^{-1}(x) = \frac{5+3x}{x} \quad x > 3$

14. $f(x) = \sqrt{4-9x^2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-x^2+4}{9}}$

15. $f(x) = \frac{4}{2-x}$

$f^{-1}(x) = \frac{-4+2x}{x} \quad x < 2$

16. $f(x) = x^3 - 2$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

LÍMITES

Aplicando la definición de límite, demostrar que:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} (3x + 2) = 14$

4. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x}{(x-3)} = 2$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} (5 - 2x) = 9$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x+7} = 4$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x+6)} = \frac{1}{5}$

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-3x} = 2$

Calcular los siguientes límites:

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+5x-3}{2x^2+3}$

sol. $\frac{3}{5}$

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2\sqrt{2+x}}$

sol. 0

9. $\lim_{x \rightarrow 2} (7x-2)(-2x^2+5)$

sol. 36



10. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+x-4} \right)$ sol. $= \frac{1}{8}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{8x^2-7x}$ sol. $= \frac{1}{7}$
12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x^2+2x-15}$ sol. $x = \frac{3}{8}$
13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{4x^2-36}$ sol. $x = \frac{1}{12}$
14. $\lim_{t \rightarrow -\frac{2}{3}} \left(\frac{3t+2}{9t^2-4} \right)$ sol. $t = -\frac{1}{4}$
15. $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{3t-1}{9t^2-1} \right)$ sol. $t = \frac{1}{2}$
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(3x - \frac{1}{2x-1} \right)$ sol. $x = 2$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7}{x} - 1 \right)$ sol. $x = -\infty$
18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}$ sol. $x = -\frac{1}{8}$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x-4}{x^2-3x+2} =$ sol. $x = -5$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ sol. $x = 3$
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{2-x} =$ sol. $x = 12$
22. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1-64x^3}{x-\frac{1}{4}} =$ sol. $x = -12$
23. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x+2} =$ sol. $x = 12$



$$24. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} =$$

$$\text{sol. } x = -\frac{9}{2}$$

$$25. \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 - 8}{(t+2)(t-3)} =$$

$$\text{sol. } x = \frac{4}{5}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} =$$

$$\text{sol. } x = \frac{11}{17}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} =$$

$$\text{sol. } x = -15$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - x + 18}{x - 2} =$$

$$\text{sol. } x = 23$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 2x + 11}{x + 1} =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 2} = 25$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{1-U} - \frac{3}{1-U} \right) =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 2} = 2$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 5x - 2}{x} + \frac{2}{x} \right) =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 0} = 5$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{7}{x^2 - 5x + 6} \right) =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 0} = -\infty$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right) =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 1^-} = -\infty$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+3} \left(\frac{x^2 - 25}{x-5} \right)^2 =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 5} = 25\sqrt{10}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 2} = \frac{1}{4}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{25}} \right) =$$

$$\text{sol. } \frac{\lim}{x \rightarrow 5} = -\frac{125}{2}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$$

$$\text{sol. } 6$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{x^3 - 64x}{x^2 + 2x}}$$

$$\text{sol. } -2$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}$$

$$\text{sol. } \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\text{sol. } \frac{1}{2}$$



41. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ sol. $\frac{q}{p}$ com $p \neq 0$
42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ sol. $\frac{1}{2}$
43. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\frac{4}{x}-\frac{4}{3}}{x-3} \right)$ sol. $-\frac{4}{9}$
44. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+5)^2-25}{h}$ sol. 10
45. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ sol. $2x$
46. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ sol. $3x^2$
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3-8}{(x+2)^2-4}$ sol. 3
48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{-1}-2^{-1}}{x}$ sol. $-\frac{1}{4}$
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{-2}-h^{-2}}{x}$ sol. $-\frac{2}{h^3}$
50. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ sol. $\frac{1}{4}$
51. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$ sol. -2
52. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ sol. 0
53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5-\sqrt{25-x^2}}$ sol. $\pm\infty$
54. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$ sol. $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$
55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ sol. $\frac{3}{2}$
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{36-x}-6}{\sqrt{x+4}-2}$ sol. $\frac{1}{3}$
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+100}-10}{\sqrt{x+1}-1}$ sol. $\frac{1}{10}$



58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x^2+x}$ sol. $\frac{1}{2}$
59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{7}}{x}$ sol. $\frac{\sqrt{7}}{14}$
60. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x-13}}{h}$ sol. $\frac{1}{2\sqrt{x-13}}$
61. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ sol. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
62. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+x-2}{8x^3+2x+5}$ sol. $\frac{3}{8}$
63. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ sol. 1
64. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x-4)^4(x+3)^2(3x-2)}{x^3(3x+13)^4}$ sol. 3
65. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x-1)^3(2x-3)^6(x-8)^9}{(x+7)^{18}-13}$ sol. 1728
66. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-5)^2(3x+2)^5(x+13)^7}{(x+2)^{13}+3x+7}$ sol. ∞
67. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{36x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x} + \sqrt[3]{31x}}$ sol. $2\sqrt{3}$
68. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ sol. 1
69. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 1}{3\sqrt{2x} - \sqrt[4]{x} + 5}$ sol. $\frac{\sqrt{2}}{6}$
70. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2+1} - x \right)$ sol. ∞
71. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x^2+1} \right)$ sol. ∞
72. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+8} - \frac{x^2}{x+1} \right)$ sol. $-\infty$
73. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3+7} - \sqrt{x^3-7})$ sol. 0
74. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$ sol. 0



75. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ sol. 0
76. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x - 10})$ sol. 3
77. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$ sol. $\frac{3}{2}$
78. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 5})$ sol. 1
79. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x}}$ sol. - 1
80. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x+2-x}}$ sol. - 3
81. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$ sol. e
82. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ sol. e^2
83. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ sol. $\frac{1}{e}$
84. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 16x - 21}{x - 3}$ sol. 7
85. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ sol. - 1
86. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 4x + 3)(x^3 - 3x^2 + 2x - 6)}{x^2 - 1}$ sol. ∞
87. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x^2 + 9x + 20)(x^3 + 2x + 8)}{x^2 + 16}$ sol. 8
88. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x-3}-1}$ sol. $\frac{8}{5}$
89. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x^2+13}-(x+1)}{x^2-10x+24}$ sol. ∞



90. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2-16}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{2x-1}-3}$ sol. $\frac{9}{2}$
91. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-4x^3+x^2-8x+15}{3x^4-2x^2+5x+1}$ sol. $\frac{2}{3}$
92. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^8-2x^7+7x^3+7}{2x^8+3x^6-2x+13}$ sol. 5
93. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-4x^3+4x^2-x+2}{2x^5+2x^3-3x+7}$ sol. 0
94. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x-1}$ Sol. $\lim_{x \rightarrow 1} = 8$
95. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ Sol $\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{11}{17}$
96. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{2/3}-4x^{1/3}+4}{(x-8)^2}$ Sol $\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{1}{144}$
97. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right)$ Sol $\lim_{x \rightarrow 1} = 3$
98. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4-\sqrt{10-x}}{2-\sqrt{10x-1}}$ Sol $\lim_{x \rightarrow 6} = -\frac{4}{55}$
99. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x^2+4x-5} - \sqrt{16x^2-9x+8})$ Sol $\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{13}{8}$
100. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{6x\sqrt{x}-28\sqrt[3]{x}+64}{5\sqrt{x}-19\sqrt[3]{x}+36}$ Sol $\lim_{x \rightarrow 64} = \infty$
101. $\lim_{x \rightarrow \frac{81}{16}} \frac{6x\sqrt{x}-114\sqrt{x}+3}{6\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}+6}$ Sol $\lim_{x \rightarrow \frac{81}{16}} = \frac{117}{16} \left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}} \right)$
102. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+16)^2}-\sqrt[3]{256}}{x}$ Sol $\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$
103. $\lim_{x \rightarrow -27} \frac{\sqrt{84+\sqrt[3]{x}}-9}{x+27}$ Sol $\lim_{x \rightarrow 27} = \frac{1}{486}$



$$104. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad f(x) \begin{cases} 1 - 2x; & x \in (-\infty, 2] \\ 2x^2 - 11; & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$\text{Sol } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

$$105. \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \quad g(x) \begin{cases} -x + 3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + 3 & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

$$106. \lim_{h \rightarrow 3} h(x) \quad h(x) \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}; & x \neq 3 \\ 3; & x = 3 \end{cases}$$

Sol No \exists el límite

$$107. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \begin{cases} 4 - x^2; & x \in (-\infty, 1] \\ 2 - x^2; & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Sol } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$108. \lim_{x \rightarrow -5} g(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 5} g(x)$$

$$g(x) \begin{cases} x - 5 & x \leq -5 \\ 2x & x \in (-5, 5) \\ 2x + 3 & x \geq 5 \end{cases}$$

$$\text{Sol } \lim_{x \rightarrow -5} g(x) = -10, 8 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 5} G(x) \text{ no } \exists$$

$$109. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$f(x) \begin{cases} 3x - 2 & x \in (-\infty, -1) \\ 2 - x & x \in (-1, 1) \\ x - 1 & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Sol. 3,0, no existe



Determine los valores de a y b de tal forma que la función dada tenga límite:

$$110. \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{sol. } 3$$

$$f(x) \begin{cases} x - 2a & x \in (-\infty, -2) \\ 3ax + b & x \in [-2, 2] \\ bx + 3 & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$111. \quad \lim_{t \rightarrow -1} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 3} f(t)$$

$$f(t) \begin{cases} 2t & t \in (-\infty, -1) \\ at - b & t \in [-1, 3] \\ 3 - 2t & t \in (3, \infty) \end{cases}$$

$$112. \quad \lim_{x \rightarrow -1} h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} h(x); h(x) \begin{cases} x^2; & x < -1 \\ 2a - bx; & x \in [-1, 1] \\ 2x + 5; & x > 1 \end{cases}$$

$$113. \quad \lim_{x \rightarrow -3} h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \quad \text{sol. } -4$$

$$h(x) \begin{cases} 5x + 2a; & x < -3 \\ a - bx; & x \in [-3, 2] \\ -2x; & x > 2 \end{cases}$$

$$114. \quad \lim_{x \rightarrow -2} h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3} h(x) \quad \text{sol. } -6$$

$$h(x) \begin{cases} x^2 - 2; & x < -2 \\ a - 2bx; & x \in [-2, 3] \\ -x^2 + 3; & x > 3 \end{cases}$$

Obtener $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$115. \quad f(x) = 3x + 7$$

Sol 3



116. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{7}{3}x$ Sol $-\frac{7}{3}$
117. $f(x) = 21 - 3x$ Sol -3
118. $f(x) = \frac{4}{5}x - 15$ Sol $= \frac{4}{5}$
119. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ Sol $\lim_{h \rightarrow 0} = 4x + 4$
120. $f(x) = -3x^2 + 2x - 7$ Sol $\lim_{h \rightarrow 0} = 6x + 2$
121. $f(x) = (x + 3)^2 + 5$ Sol $2x + 6$
122. $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$ Sol $= \frac{5}{(2x+3)^2}$
123. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ Sol $-\frac{2}{(x-1)^2}$
124. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$ Sol $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{x^2+2x-3}{x-1^2}$
125. $f(x) = \sqrt{x+3}$ Sol $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$
126. $f(x) = \sqrt{13-x}$ sol. $\frac{-1}{2\sqrt{13-x}}$
127. $f(x) = \sqrt{2-3x}$ Sol $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$
128. $f(x) = \sqrt{2x-3}$ Sol $= \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$
129. $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$ Sol $= \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$
130. $f(x) = \sqrt{14+9x^2}$ Sol $= \frac{9x}{\sqrt{14+9x^2}}$
131. $f(x) = \sqrt{-2x^2-7}$ Sol $= -\frac{2x}{\sqrt{-2x^2-7}}$
132. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ Sol $= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



Obtener el límite de las siguientes funciones trigonométricas

133. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{7}}{x} =$ Sol $\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{7}$
134. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{x^2}$ Sol $= \infty$
135. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ Sol 1
136. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 5x$ Sol $\frac{1}{5}$
137. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cot 3x$ Sol $\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{2}{3}$
138. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc 5x}{\cot x}$ Sol $= \frac{1}{5}$
139. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/3)}{\sin x}$ Sol 0
140. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ Sol -1
141. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin 2x - 4}{4x - 8}$ Sol $= \frac{\sin 2}{4}$
142. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - \pi/2)}{x}$ sol 1
143. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 4}{\sin^2(x - 2)}$ Sol $= \frac{2}{1 - \cos 2}$
144. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ Sol $= \frac{3}{5}$
145. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 6x + 9}$ Sol $= -\frac{\sin 4}{16}$
146. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc^2 x$ Sol 1
147. $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{x^2}{\sin^2(2x)}$ Sol $= \frac{3}{4}$



Asíntotas

Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales, si las hay, y por medio de valores prueba, trace la gráfica de cada una de las funciones.

148. $f(x) = \frac{5}{x+2}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=0$

asíntota VERTICAL: $x=-2$

149. $f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=0.67$

asíntota VERTICAL: $x=1.67 \text{ ó } 5/3$

150. $f(x) = \frac{x^2-4x-21}{x^2+x-6}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$

asíntota VERTICAL: $x=2$

151. $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{8-x}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=0$

asíntota VERTICAL: $x=8$

152. $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=3, -3$

153. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-36}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$

asíntota VERTICAL: $x=-6, 6$



$$154. \quad f(x) = \frac{2x}{x^2+5x-14}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=0$

asíntota VERTICAL: $x=2$, $x=-8$

$$155. \quad f(x) = \frac{4x}{x^2+5x-14}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=0$

asíntota VERTICAL: $x=2$, $x=-7$

$$156. \quad f(x) = \frac{5x^2}{3x^2-6}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=5/3$

asíntota VERTICAL: $x= \sqrt{2}$, $x= -\sqrt{2}$

$$157. \quad f(x) = \frac{3-2x^2}{x^2+x-6}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y= -2$

asíntota VERTICAL: $x= 2$, $x=-3$

$$158. \quad f(x) = \frac{2x^2-5x-12}{-2x^2+5x-12}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=-1$

asíntota VERTICAL: -----

$$159. \quad f(x) = \frac{9x^2}{2x^2+6}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y= \frac{9}{2}$

asíntota VERTICAL: -----



160. $f(x) = \frac{9x^2}{2x^2-6}$

Asíntota HORIZONTAL: -----asíntota VERTICAL: $x=-1.5$, $x= 1.5$

161. $f(x) = \left| \frac{x+5}{4-x} \right|$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$ asíntota VERTICAL: $x=4$

162. $f(x) = \left| \frac{3-2x}{2+x} \right|$

Asíntota HORIZONTAL: $y=2$ asíntota VERTICAL: $x=-2$

163. $f(x) = \sqrt{\frac{4x-3}{x-6}}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=2$ asíntota VERTICAL: $x=6$

164. $f(x) = \sqrt{\frac{8x-7}{x-3}}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=3$ asíntota VERTICAL: $x=3$

165. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-36}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$ asíntota VERTICAL: $x=6$, $x=-6$

166. $f(x) = \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2-5x+9}}$

Asíntota HORIZONTAL: $y=3$ $y = -3$ asíntota VERTICAL: -----



$$167. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-15}}{x-5}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$ $y = -1$

asíntota VERTICAL: $x = -5$

$$168. f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x-14}}{x-2}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$ $y = -1$

asíntota VERTICAL

$$169. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x+1}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$ $y = -1$

asíntota VERTICAL:

$$170. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+8x+15}}{x-3}$$

Asíntota HORIZONTAL: $y=1$ $y = -1$

asíntota VERTICAL: $x=5$ $x=2$

LIMITES POR LA REGLA DE L'HOPITAL

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2-1}$$

$$\text{Sol } \lim_{x \rightarrow 1} = 7$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-5x^2+6x-3}{x^3-2x^2+x}$$

$$\text{Sol } \lim_{x \rightarrow 1} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-4x^2+2}{x^3+2x+7}$$

$$\text{Sol } 3$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2+2x-1}{3x^2-x+7}$$

$$\text{Sol } \frac{2}{3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x}$$

$$\text{Sol } 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$\text{Sol } = -\frac{1}{4}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Sol } 1$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{x}$$

$$\text{Sol } -4$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$\text{Sol } 0$$



10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2 \sin x}{\tan x}$ Sol -1
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{4 \sin x}$ Sol $\frac{1}{2}$
12. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$ Sol -1
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-e^x}{x^2}$ Sol $-\frac{1}{2}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-e^x}{x^3}$ Sol $-\infty$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ Sol 1
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{3x} + \log x}{e^{3x} + x^2}$ Sol 2
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log x}{x^2 + 1}$ Sol. 0
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x}$ sol.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ sol. $-\frac{1}{2}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ sol. 0
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{1+x} - \sin x \right]$ sol. 0
22. $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-9} \right]$ sol. $\frac{1}{24}$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^x$ sol. e^7
24. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x)^{x^2}$ sol. e^0
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}}{\sin^{1/x}}$ sol. ∞

CAPÍTULO





CÁLCULO DIFERENCIAL

“Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es simplemente porque no comprenden cuán complicada es la vida”

John Louis von Neumann

DERIVADAS

Partiendo de la definición de derivada. De las siguientes funciones obtenga $\frac{dy}{dx} = f'(x)$:

1.- $y = 3x - 7$

5.- $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

2.- $f(x) = 2x^3 + 3x - 5$

6.- $y = \frac{2}{x+1}$

3.- $g(x) = \sqrt{5x}$

7.- $y = \frac{x+1}{x-1}$

4.- $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

8.- $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

Aplicando las reglas de derivación, obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $3x^4 - 2x^2 + 8$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 4x$$

2. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^6$$

3. $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$$



4. $y = \frac{a+bx+cx^2}{x}$

5. $r = \sqrt{1-2\theta}$

6. $f(t) = (2-3t^2)^3$

7. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

8. $y = x\sqrt{a+bx}$

9. $y = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$

10. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

11. $y = \ln(ax^2 + b)$

12. $y = \ln x^3$

13. $y = \ln^3 x$

14. $y = \sqrt{9-2x^2}$

15. $y = \ln(ax\sqrt{a+x})$

16. $y = x \ln x$

17. $y = \ln x + \sqrt{1+x^2}$

18. $s = \ln \sqrt{\frac{a+bt}{a-bt}}$

19. $y = e^{x^2}$

20. $s = e^{\sqrt{t}}$

21. $z = b^{2y}$

22. $y = \frac{\ln x}{x}$

23. $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

24. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

25. $y = x^x$

26. $s = \left(\frac{a}{t}\right)^t$

27. $y = \frac{x^3\sqrt{3x+a}}{\sqrt{2x+b}}$

28. $y = 3 \cos 2x$

29. $r = \sqrt[3]{\tan 3\theta}$

$$\frac{dy}{dx} = c - \frac{a}{x^2}$$

$$r' = -\frac{1}{r}$$

$$f'(t) = -18t(2-3t^2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(a^2-x^2)^{2/3}}$$

$$y' = \frac{2a+3bx}{2\sqrt{a+bx}}$$

$$y' = \frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$$

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$y' = \frac{2ax}{ax^2+b}$$

$$y' = \frac{3}{x}$$

$$y' = \frac{3\ln^2 x}{x}$$

$$y' = \frac{-2x}{\sqrt{9-2x^2}}$$

$$y' = \frac{2a+3x}{2x(a+x)}$$

$$y' = 1 + \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$s' = \frac{ab}{a^2-b^2t^2}$$

$$y' = 2xe^{-x^2}$$

$$s' = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$$

$$z' = 2b^{2y} \ln b$$

$$y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = y(1 + \ln x)$$

$$s' = s\left(\ln \frac{a}{t} - 1\right)$$

$$y' = y\left[\frac{3}{x} + \frac{3}{2(3x+a)} - \frac{1}{2x+b}\right]$$

$$y' = -6 \sin 2x$$

$$r' = \frac{\sec^2 3\theta}{\tan^{2/3} 3\theta}$$



30. $r = \tan \theta - \theta$

31. $y = x \cos x$

32. $r = \frac{\sin \theta}{\theta}$

33. $y = \sin 2x \cos x$

34. $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

35. $y = \arcsin \frac{x}{a}$

36. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$

37. $y = \operatorname{arc cot} \left(\frac{a+x}{1-ax} \right)$

$r' = \sec^2 \theta - 1$

$y' = \cos x - x \sin x$

$r' = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}$

$y' = 2 \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$y' = \sec x$

$y' = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$y' = 2/\sqrt{a^2 - x^2}$

Sol. $y' = \frac{1}{1+x^2}$

Comprobar cada una de las siguientes derivadas, aplicando reglas de derivación

1. $f(t) = (2 - 3t^2)^3$

2. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

3. $y = \left(a - \frac{b}{x}\right)^2$

4. $y = \left(a + \frac{b}{x^2}\right)^3$

5. $y = x\sqrt{a + bx}$

6. $y = t\sqrt{a^2 + t^2}$

7. $y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$

8. $y = \frac{x}{a^2 - x^2}$

9. $y = \sqrt{\frac{1-cx}{1+cx}}$

10. $y = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$

11. $s = \sqrt[3]{\frac{2+3t}{2-3t}}$

12. $y = \sqrt{2px}$

$f'(t) = -18(2 - 3t^2)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{x^2} \left(a - \frac{b}{x}\right)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{x^3} \left(a + \frac{b}{x^2}\right)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2a+3bx}{2\sqrt{a+bx}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 + 2t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{(1+cx)\sqrt{1-c^2x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2a^2x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^4 + x^4}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(2+3t)^{2/3}(2-3t)^{4/3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$

**Derivar cada una de las siguientes funciones.**

1.. $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\tan x}{\sqrt{\sec x}}$

2.. $f(\theta) = \tan\theta - \theta$

Sol: $f'(\theta) = \tan^2\theta$

3. $y = \ln(\sin ax)$

Sol: $y' = a \tan^{-1} ax$

4. $y = \ln\sqrt{\cos 2x}$

Sol: $y' = -\tan 2x$

5. $y = e^{ax} \sin bx$

Sol: $y' = e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx)$

6. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

Sol: $y' = \sec x$

7. $\phi = \sin(\theta + a)\cos(\theta - a)$

Sol: $\phi' = \cos 2\theta$

8. $q = \frac{1}{3}\tan^3\theta - \tan\theta + \theta$

Sol: $q' = \tan^4\theta$

9. $y = \cos^{-1} \frac{x}{a}$

Sol: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

10. $y = \sec^{-1} \frac{x}{a}$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$

11. $y = \tan^{-1} \frac{x}{a}$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}$

12. $f(u) = u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{u}{a}$

Sol: $f'(u) = 2\sqrt{a^2 - u^2}$

13. $u = a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a}\right) + \sqrt{2au - u^2}$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}$



$$14. \quad \phi = \tan^{-1} \frac{a+r}{1-ar}$$

$$\text{Sol: } \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+r^2}$$

Encontrar la $\frac{dy}{dx}$ por medio de la derivación implícita:

$$1. \quad x^2 + y^2 = 16$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{x}{y}$$

$$2. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$$

$$\text{Sol. } y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$3. \quad x^3 - xy + y^2 = 4$$

$$\text{Sol. } y' = \left(\frac{y-3x^2}{2y-x} \right)$$

$$4. \quad x^3y^3 - y = x$$

$$\text{Sol. } y' = \left(\frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1} \right)$$

$$5. \quad \text{sen}x + 2\text{cos}2y = 1$$

$$\text{Sol. } y' = \frac{\text{cos}x}{4\text{sen}2y}$$

$$6. \quad \text{sen}x = x(1 + \text{tany})$$

$$\text{Sol. } y' = \frac{\text{cos}x - \text{tany} - 1}{x\text{sec}^2y}$$

$$7. \quad y = \text{sen}xy$$

$$\text{Sol. } y' = \frac{y\text{cos}xy}{1-x\text{cos}xy}$$

$$8. \quad xy = 4$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{y}{x}$$

$$9. \quad y^2 = \frac{y^2-1}{x^2+4}$$

$$\text{sol. } y' = \frac{xy(y^2-1)}{(x^2+4)}$$

$$10. \quad (x+y)^3 = x^3 + y^3$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)}$$

$$11. \quad (x^2 + 4)y = 8$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{2xy}{x^2+4}$$

$$12. \quad (x^2 + y^2)^2 = 4x^2y^2$$

$$\text{Sol. } y' = \frac{x}{y}$$

$$13. \quad (y-2)^2 = 4(x-3)$$

$$\text{Sol. } y' = \frac{2}{y-2}$$

$$14. \quad \text{tan}y = x$$

$$\text{Sol. } y' = \text{cos}^2y$$

$$15. \quad x^3y + xy^3 = 10$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{y(3x^2+y^2)}{x(x^2+3y^2)}$$

$$16. \quad x^2y^2 + 3xy = 10y$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{y(2xy+3)}{2x^2y+3x-10}$$

$$17. \quad x^2(x+2y) = y^2(2x-y)$$

$$\text{Sol. } y' = -\frac{3x^2+4xy-2y^2}{2x^2-4xy+3y^2}$$



18. $y = \text{sen}(x + y)$

Sol. $y' = -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)-1}$

19. $y = \cos(x - y)$

Sol. $y' = \frac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x-y)-1}$

20. $y + 1 = e^{x-y}$

Sol. $y' = \frac{1}{e^{y-x}+1} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$

Use derivación logarítmica para calcular $\frac{dy}{dx}$

21. $y = x^{\sqrt{x}}$

$y' = \frac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$

22. $y = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x\sqrt{4-x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{x}{4+x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{4-x^2} \right]$

23. $y = \frac{x^3\sqrt{3x+a}}{\sqrt{2x+b}}$

$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x+a} - \frac{1}{2x+b} \right]$

24. $y = x^n(a + bx)^m$

$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{n}{x} + \frac{mb}{a+bx} \right]$

25. $y = x^{\text{sen } x}$

$\frac{dy}{dx} = x^{\text{sen } x} \left(\frac{\text{sen } x}{x} + \cos x \ln x \right)$

26. $y = (\cos x)^x$

$\frac{dy}{dx} = y [\ln(\cos x) - x \tan x]$

Obtener la segunda derivada de las siguientes funciones.

1. $y = 3x^3 - 2x^2 + 6x$

$y'' = 9x^2 - 4x + 6$

2. $s = \sqrt{a + bt}$

$s'' = -\frac{b^2}{4(a+bt)^{3/2}}$

3. $y = \frac{a+bx}{a-bx}$

$y'' = \frac{4ab^2}{(a-bx)^3}$

4. $y = \frac{x^2}{a+x}$

$y'' = \frac{2a^2}{(a+x)^3}$

5. $y = x\sqrt{3x-2}$

$y'' = \frac{3(9x-8)}{4(3x-2)^{3/2}}$

6. $y = \sqrt[3]{x^2+4}$

$y'' = -\frac{2(x^2-12)}{9(x^2+4)^{5/3}}$

7. $y^2 = 4ax$

$y'' = -\frac{a^2}{2(ax)^{3/2}}$

8. $x^2 + y^2 = r^2$

$y'' = -\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}}$

9. $x^3 + y^3 = 1$

$y'' = -\frac{2x}{(1-x^3)^{5/3}}$



Encontrar todos los extremos relativos. Utilizar el criterio de la segunda derivada donde sea conveniente.

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ Sol. Pm (3,-25)
2. $f(x) = (x - 5)^2$ Sol. Pm (5, 0)
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ Sol. PM (0, 3), Pm (2,-1)
4. $f(x) = x^2(6 - x)^3$ Sol. PM (2.4, 268.74), Pm (0, 0)
5. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$ Sol. Pm (0,-3)
6. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ Sol. PM (-2,-4), Pm (2, 4)
7. $f(x) = \cos x - x$ Sol. $[0, 4\pi]$
8. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ Sol. PM $(1, \frac{1}{2})$, Pm $(-1, -\frac{1}{2})$

**Encontrar la pendiente de cada curva en el punto indicado.**

- | | |
|---|--|
| 1. $y = x^3 + 3x - 1$; $P=(1,3)$. | Sol. $m=6$. |
| 2. $y = -3x^4 + 4x^3$; $P=(-1,7)$. | Sol. $m=24$. |
| 3. $y = \sqrt{4-x^2}$; $P(1,\sqrt{3})$, $Q(-1,\sqrt{3})$. | Sol. $m_p = \frac{-1}{\sqrt{3}}$; $m_q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. |
| 4. $y = \sqrt{x^2-4}$; $P(5,\sqrt{21})$, $Q(-3,\sqrt{5})$. | Sol. $m_p = \frac{-3}{\sqrt{5}}$; $m_q = \frac{5}{\sqrt{21}}$. |
| 5. $y = 3(1+x^2)^{-1}$; $P(1, 3/2)$. | Sol. $m = -3/2$. |
| 6. $y = x + 2x^{-1}$; $P(3, \frac{11}{3})$. | Sol. $m = \frac{7}{9}$. |
| 7. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 5$; $P(1, -2)$. | Sol. $m = \frac{2}{3}$. |
| 8. $x^3 + 2x^2y - 2y^2 = -5$; $P(-1, -1)$. | Sol. $m = -\frac{7}{8}$. |
| 9. $x^2 - 6\sqrt{XY} - 4y^2 = 24$; $P(8,2)$. | Sol. $m = -29/44$. |
| 10. $6x - y^2 = \sqrt{2XY} - xy^3 + 51$; $P(8,1)$. | Sol. $m = -\frac{27}{80}$. |

Recta tangente.

1. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x^2-9}$, en los puntos: $P(-5,4)$, $Q(5,4)$.

Sol. $y = -\frac{5}{4}x - 9/4$; $y = \frac{5}{4}x - 9/4$.

2. Obtenga la ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{x^2-9}$, en los puntos: $P(-5,4)$, $Q(5,4)$.

Sol. $y = -\frac{4}{5}x + 8$; $y = \frac{4}{5}x$.

3. Obtenga las abscisas de los puntos donde la recta tangente sea horizontal a la gráfica

$y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ Sol. $X = \frac{2}{3}$; $x=2$.

4. Obtenga las abscisas de los puntos sobre la gráfica de: $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + 3$, para las cuales la recta tangente se horizontal. Sol. $X = \frac{3}{2}$; $X = -3$.



5. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{-X - 1}$, que sea paralela a la recta $3y+2x-9=0$. Sol. $X = -25/16$; $y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{24}$.
6. Obtenga la ecuación de la recta normal a la recta tangente a la curva $y = \sqrt{-X - 1}$, que es paralela a la recta $3y+2x-9=0$. Sol $y = \frac{3}{4}$; $y = \frac{3}{2}x + \frac{99}{32}$.
7. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 5$, y que es paralela a la recta $3x + y = -5$. Sol. $Y = -17/4$; $y = -3x - \frac{23}{4}$.
8. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{5}{x^2+9}$ en el punto $P(1, \frac{1}{2})$.
- Sol. $m = -\frac{1}{10}$; $y = -\frac{x}{10} + \frac{6}{10}$.
9. Obtenga los puntos de la gráfica generada por la curva $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 8x + 4$, donde la tangente pendiente 1. Sol $p = (\frac{3}{2}, -\frac{73}{8})$, $q = (-3, -\frac{7}{2})$.
10. Obtenga los puntos de la gráfica generada por la curva $y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 5$, donde la tangente tenga pendiente 1. Sol $P(\frac{1}{3}, \frac{14}{5})$; $Q(-2, 9)$.

Recta Tangente y Normal

Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal para cada función, en el punto indicado:

$$y = 5x^3 + 1 \text{ en } P(0, 1)$$

$$R. \text{ tangente } Y = 1, \quad R. \text{ Normal } X = 0$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ en } P(5, \frac{1}{5})$$

$$RT. x + 25y - 10 = 0, \quad RN. y = 25x - \frac{624}{5}$$

$$y = \sqrt{x+1} \text{ en } P(3, 2)$$

$$RT. -x + 2y - 1 = 0, \quad RN. 2x + y - 8 = 0$$

$$x^3 y + xy^3 = 10 \text{ en } (1, 2)$$

$$RT. 13y + 14y - 40 = 0, \quad RN. -13x + 14y - 15 = 0$$

$$x^2 y^2 + 3xy = 10y \text{ en } (2, 1)$$

$$RT. 4y + 7x - 18 = 0, \quad -4x + 7y + 1 = 0$$

$$\text{sen } xy = y \text{ en } (\frac{\pi}{2}, 1)$$

$$RT. y = 1, \quad RN. x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$RT. x^3_0 (y - y_0) + 2(x - x_0) = 0, RN. 2(y - y_0) - x^3_0 (x - x_0) = 0$$



$y = \frac{2x+1}{x-1}$	RT. $(y - y_0)(x_0 - 1)^2 + 3(x - x_0) = 0$, RN. $3(y - y_0) - (x_0 - 1)^2(x - x_0) = 0$
$y = \frac{x}{x^2-1}$	RT. $(x_0^2 - 1)^2(y - y_0) + (x_0^2 + 1)(x - x_0)$, RN. $(y - y_0)(x_0^2 + 1) - (x_0^2 - 1)^2(x - x_0) = 0$
$y = \frac{x}{x^2+4}$	RT. $(y - y_0)(x_0^2 + 4)^2 + (x_0^2 - 4)(x - x_0) = 0$
$y = \ln(x^2 + 2)$ en $x = 4$	RT. $9y - 4x - 10 = 0$, RN. $4y + 9x + 24.43 = 0$
$y = \log(4x - 3)$ en $x = 2$	RT. $y - 0.347x + 0.2087 = 0$, RN. $y + 2.878x - 6.4270 = 0$
$y = \ln \sqrt{\tan x}$ en $x = \frac{\pi}{4}$	RT. $-x + y + \frac{\pi}{4} = 0$, RN. $x + y - \frac{\pi}{4} = 0$
$y = x \arcsen x$ en $x = \frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{2}$ NO DEFINIDO EN DOMINIO.
$y = \frac{\arctan x}{x}$ en $x = 1$ rad	RT. $y + 0.285x - 1.035 = 0$, RN. $y - 3.508x + 2.723 = 0$

Determina los extremos locales (máximos y/ó mínimos relativos) de cada una de las siguientes funciones.

- $f(x) = x^2 - 6x$
- $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
- $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
- $f(x) = 8x^2 - 2x^4$
- $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$
- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$
- $f(x) = 8x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$

Determina los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones.

- $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$
- $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$
- $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$
- $f(x) = 2x^3 + 1$
- $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$



6. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
7. $f(x) = x^2 - x$
8. $f(x) = x^3 - 12x$
9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

Determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = -x^2 + 7x$
2. $f(x) = x^2 - 3x - 40$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
4. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
5. $f(x) = 4 + 2x^2 - x^4$
6. $f(x) = x^5 - 5x^3$
7. $f(x) = x + \frac{4}{x}$
8. $f(x) = (x)(\sqrt{x+3})$
9. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 1$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Aplicando conceptos de derivación, resuelva los siguientes problemas:

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. Calcula el área del rectángulo más grande que debe tener un perímetro de 200 centímetros. Sol. Área=2500 cm^2
2. Un fabricante de cajas de estaño desea emplear piezas de 8 pulgadas por 15, pulgadas cortando cuadros iguales de las esquinas y doblando los dos. Calcula la longitud del lado del cuadrado que será cortado si se desea obtener de cada pieza de estaño una caja abierta que tenga el mayor volumen posible. Sol. 5/3 de pulgada.
3. Una sección rectangular de un terreno se va a cercar por tres lados y un río servirá como límite natural para el cuarto lado, en tales condiciones, calcules las dimensiones de la sección más grande que se pueda cercar con 240m de alambre. Sol. 60x120m.



- Si el producto de los números positivos es 54; encuentra esos número de tal manera, que la suma de uno ellos con el cuadrado del otro sea máxima.
Sol. 18 y 3
- Encuentra las dimensiones del rectángulo de mayor área que se pueda inscribir en el prime cuadrante bajo las curva $y = 3 - x^2$.
Sol. A=2
- Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueda inscribirse en una circunferencia de radio R.
Sol. $A = 2R^2$

En economía se utilizan las siguientes funciones.

Demanda (precio): $p = f(x)$

Costo total: $C = g(x)$

Costo Medio: $c = \frac{C}{x}$

Ingreso: $I = p * x$

Ganancia: $G = I - C$

Mientras que las derivadas de estas funciones se les denominan funciones marginales, así por ejemplo se habla de "costo marginal" o de "ganancia marginal".

- Para un determinado producto el precio es de $p(x) = 5 - .02x$ y el costo total es de $C(x) = 3 + 2x$ ¿cuál es el valor de x que proporciona la ganancia máxima.
Sol. $x = 75$
- Si el costo de un determinado producto está dado por $C(x) = 1600 + 6x + 0.01x^2$ ¿cuál es el valor del costo medio y del costo marginal total para $x = 100$ unidades?
Sol. Costo medio= 23 Costo marginal= 8.
- La producción diaria de una mina de cobre que puede operar hasta 14 horas diarias es $P(t) = 54t - 0.09t^2$ toneladas, transcurridas t horas.
¿Cuántas horas diarias debe trabajar la mina para una producción máxima?

Sol. 14 horas.



PROBLEMAS DE RAZÓN DE CAMBIO

1.- La ley de movimiento de un objeto que se lanza hacia arriba es $f(t) = 40t - t^2$.

Hallar:

- a) La velocidad con que llega al suelo cuando cae de regreso. Sol.-40m/seg
 b) La altura máxima alcanzada sol.50m

2.- Una partícula se mueve a lo largo del eje coordenado, y s , su distancia en centímetros desde el origen al concluir t segundos, está dada por la función $s = \sqrt{5t + 1}$. encontrar la velocidad instantánea de la partícula al final de $t=3$ seg
 Sol. $\frac{5}{8}$ cm/seg

3.- Si una partícula se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su distancia desde el origen, después de t segundos es: (a) $(-t^2 + 4t)$ metros. (b) $(t^2 - 2t)$ metros. ¿Cuánto se detiene momentáneamente la partícula, es decir, cuando es cero la velocidad instantánea?

4.- Cierta cultivo de bacterias crece de modo que tiene una masa de $(\frac{1}{2}t^2 + 1)$ gramos después de t horas.

- (a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$? sol.0.02005g
 (b) ¿Cuál fue su crecimiento medio durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$? sol.2.005 g/hr
 (c) ¿Cuál fue su crecimiento instantáneo cuando $t=2$? Sol.2 gr/hr

5.- El peso en gramos de un tumor maligno en el momento t es $w(t) = 0.2t^2 - 0.09t$ en donde t se mide en semanas. Encuentra el índice de crecimiento del tumor cuando $t=10$. (Nota: se debe interpretar al "índice de crecimiento" como la velocidad de crecimiento en el instante $t=10$)

sol.3.91 gr/sem

6.- Sea $C(x)$ la función de costo dada por $C(x) = 8000 + 0.4x + 0.0002x^2$

- a) Determinar el costo por producir 100 unidades. Sol. 802.4
 b) Determinar la función de costo marginal, la de costo medio y los valores de ambas en x .
 Sol. $CM = 0.004x$ $CP = \frac{800.04}{x} + 0.0002x$
 c) Determinar el mínimo de la función de costo medio Sol. $X = 2000.05$



- 7.- Una empresa encuentre que el costo por producir x litros de cierto producto químico está dado por $C(x)=3+x+\frac{10}{x}$. Compare el costo marginal al producir 10 litros con el costo de producir el undécimo litro. **Sol. $CM=1-\frac{10}{x^2}$. $C(11)=14.90$**
- 8.- Un trozo de alambre de 20 pulgadas de largo va a doblarse para formar un marco ¿Cuál es la mayor área que puede doblarse? **Sol. $A=25 \text{ cm}^2$ $X=5$ $Y=5$**
- 9.- Un arrendador ha adquirido un nuevo edificio con 100 apartamentos para rentar y encuentra que entre más unidades x quiera rentar, menor debe de ser su precio $p(x)$ de acuerdo con la formula $p(x)=180-1.2x$, $0 \leq x \leq 100$
Sol. Max en (75,6750)
- 10.- Un abrevadero de 60 pies de largo tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles cuyos lados iguales son de 5 pies de longitud. Determinar la anchura en la parte superior de un extremo triangular de manera que el volumen del abrevadero sea máximo **Sol. $= 5 \sqrt{2}$**
- 11.- Un fabricante de cajas de estaño desea emplear piezas de 8 por 15 pulgadas, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados. Calcule la longitud del lado del cuadrado que será cortado si se desea obtener de cada pieza de estaño una caja abierta, que tenga el mayor volumen posible
Sol. Max $X=5/3$
- 12.- Un terreno rectangular que tiene 3200m. Se desea cercar y dividir en tres porciones iguales mediante dos cercas divisoras paralelas a dos de los lados. Encontrar las dimensiones del terreno que requieren la menor cantidad de cerca.
Sol. $X=6400$ $Y=1/2$
- 13.- Un terreno de forma rectangular se encuentra adyacente a un río y se debe cercar en tres lados, el lado que da al río no requiere cerca. Si se dispone de 100m. de cerca, encuentre las dimensiones del terreno con el área máxima.
Sol. $X=50$ $Y=50$
- 14.- Un campesino tiene 750m de cerca y desea cercar una superficie rectangular, para dividirla en cuatro corrales con cercado paralelo a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área máxima posible de los cuatro corrales? **Sol. 14,062.05 m²**



15.- Un terreno rectangular se va a cercar y dividir en tres porciones iguales mediante dos cercas divisoras paralelas a dos de los lados.

a) Si el área es de 4500 m^2 , encuentre las dimensiones del terreno que requieran la mínima cantidad cerca. **Sol. 379.45**

b) Si la cerca total que va a cercarse es de 8000 m , encuentre las dimensiones del terreno abarcado que tenga la mayor área. **Sol. $200,000 \text{ m}^2$**

16. De una pieza cuadrada de cartón se va a formar una caja abierta por arriba. Cortando un cuadrado en cada una de las esquinas y doblando los bordes, dado que el cartón mide 40 cm de lado. Encuentre las dimensiones de la caja que dará lugar al volumen máximo, y cuál es el valor de dicho volumen.

Sol. $V_{\max} = 4739.46$

17. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja base cuadrada y sin tapa, calcule el volumen máximo posible de esta caja y sus dimensiones

Sol. $V_{\max} = 6158,4025$

18. Hallar dos números cuya diferencia sea 100 y su producto sea mínimo

Sol. $X=50 \ Y=-50$

19. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima **Sol. $=10 \ Y=10$**

20. (a) Determine el punto más cercano al origen en la recta $y=2x-3$

Sol. $P (6/5; -3/5) \quad d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

21.(b) Determine los puntos de la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que están en el punto más cerca del punto $P (2,0)$. **Sol. $(1, \pm \sqrt{5})$**

CAPÍTULO





CÁLCULO INTEGRAL

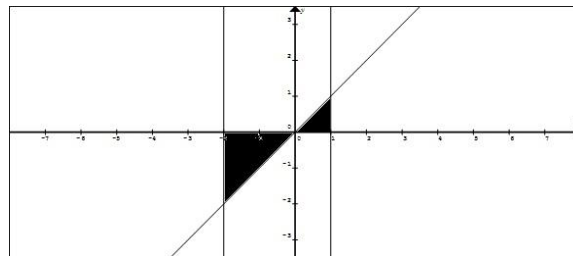
"Las matemáticas son una ciencia exacta salvo cuando te equivocas."

Jaume Perich

Aplicaciones de la Integral. Áreas

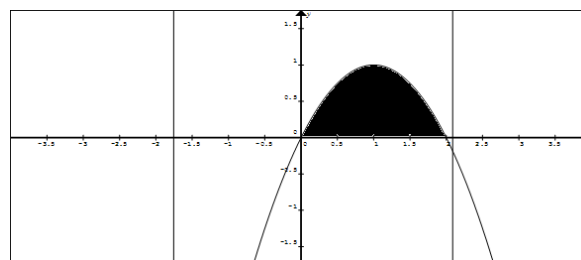
Trace la región delimitada por las curvas y encuentre su área:

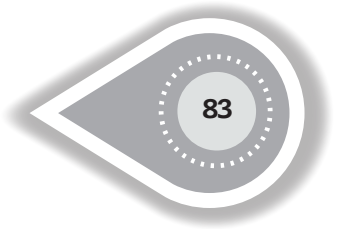
a) $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=x$ solución: $9/2U^2$



b) $f(x)=3x^3-x^2-10x$ y $g(x)=-x^2+2x$

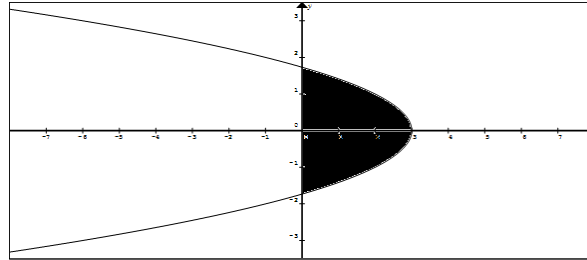
solución: $24U^2$





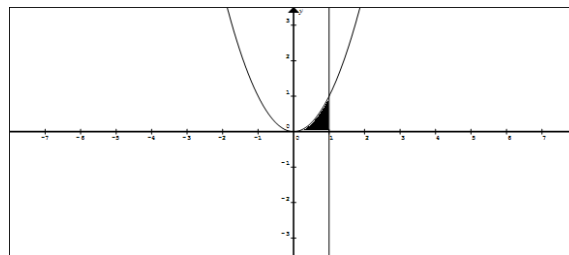
c) $f(x)=3-y^2$ y $g(x)=x^2+2x$

solución: $9/2U^2$

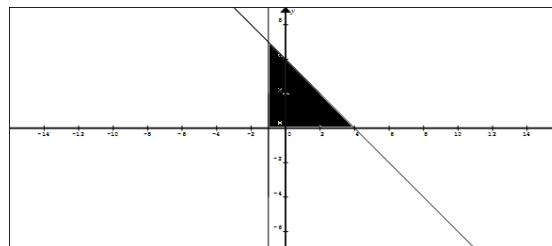


d) $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$

solución: $1/3U^2$

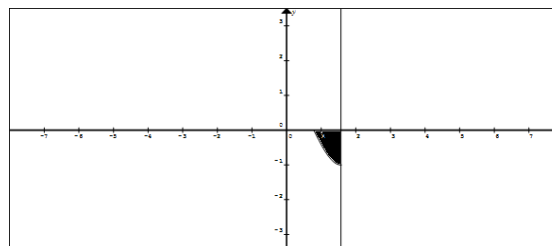


e) $f(x)=x^2+2x$ y $g(x)=-x+4$ en intervalo $[-4,2]$ solución: $7/2U^2$



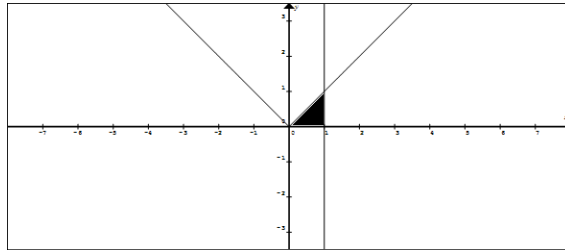
f) $f(x)=\cos 2x$ y $g(x)=0$ en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$

solución $1/2U^2$

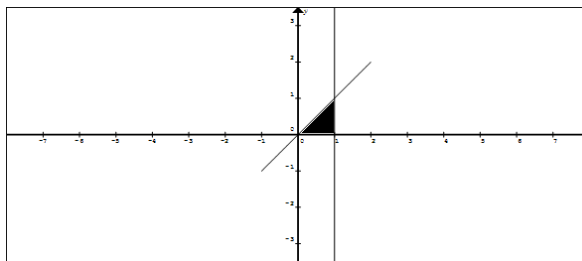




g) $f(x)=2/1+x^2$ y $g(x)=|x|$

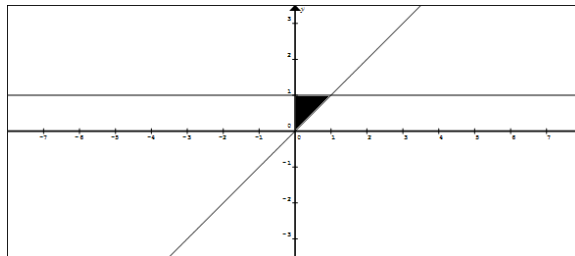
solución: $\pi - 1$ 

h) $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=x$ en el intervalo $[-1,2]$

solución: $9/2$ 

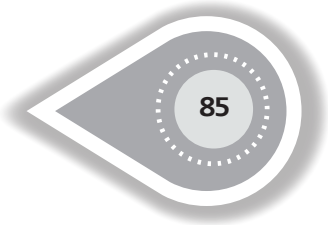
i) $f(x)=y$ y $g(x)=1/y^2$

solución: 1



Técnicas de Integración

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $\int 5a^2 x^6 dx$ | $\frac{5}{7}a^2 x^7$ |
| 2. $\int (6x^2 + 8x + 3) dx$ | $2x^3 + 4x^2 + 3x$ |
| 3. $\int x(x+a)(x+b) dx$ | $\frac{x^4}{4} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2}$ |
| 4. $\int (a + bx^3)^2 dx$ | $a^2x + \frac{abx^4}{2} + \frac{b^2x^7}{7}$ |
| 5. $\int \sqrt{2px} dx$ | $\frac{2x}{3} \sqrt{2px}$ |
| 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$ | $\frac{nx^n}{n-1}$ |



- | | |
|--|--|
| 7. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$ | $\sqrt[n]{nx}$ |
| 8. $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$ | $a^2x - \frac{9}{5}a^3x^3 + \frac{9}{7}a^3x^3$ |
| 9. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ | $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x$ |
| 10. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ | $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x}$ |
| 11. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx$ | $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$ |
| 12. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$ | $2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$ |
| 13. $\int \frac{dx}{x^2+7}$ | $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}$ |
| 14. $\int \frac{dx}{x^2-10}$ | $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right $ |
| 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ | $\ln(x + \sqrt{4+x^2})$ |
| 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$ | $\operatorname{arcsen} \frac{x}{2\sqrt{2}}$ |
| 17. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$ | $\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2+2})$ |
| 18. a) $\int tg^2 x dx$ | $tg x - x$ Indicación Poner $tg^2 x = sec^2 x - 1$ |
| 19. b) $\int th^2 x dx$ | $x - th x$ Indicación Poner $th^2 x = 1 - \frac{1}{ch^2 x}$ |
| 20. a) $\int ctg^2 x dx$ | $-ctg x - x$ |
| 21. b) $\int cth^2 x dx$ | $x - cth x$ |
| 22. $\int 3^x e^x dx$ | |
| 23. $\int \frac{a dx}{a-x}$ | 39. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)^2}$ |
| | $\frac{3e^2}{\ln 3+1}$ |
| | $a \ln \left \frac{C}{a-x} \right $ |
| 24. $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$ | $x + \ln 2x + 1 $ |



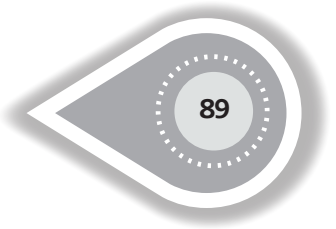
25. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx$ $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln|3+2x|$
26. $\int \frac{x dx}{a+bx}$ $\frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln|a+bx|$
27. $\int \frac{ax+b}{ax+\beta} dx$ $\frac{a}{\alpha} + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2} \ln|ax+\beta|$
28. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$ $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x-1|$
29. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx$ $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3|$
30. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx$ $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln|x-1|$
31. $\int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx$ $a^2x + 2ab \ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a}$
32. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$
33. $\int \frac{b dy}{\sqrt{1-y}}$ $-2b\sqrt{1-y}$
34. $\int \sqrt{a-bx} dx$ $-\frac{2}{3b} \sqrt{(a-bx)^3}$
35. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ $\sqrt{x^2+1}$
36. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$ $2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2}$
37. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$ $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$
38. $\int \frac{dx}{7x^2-8}$ $\frac{1}{4\sqrt{14}} \ln \left| \frac{x\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{x\sqrt{7} - 2\sqrt{2}} \right|$



40. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)^2}$ $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b} + x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - x\sqrt{a-b}} \right|$
41. $\int \frac{x^2}{x^2+2} dx$ $\text{sol. } x - \sqrt{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}}$
42. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2} dx$ $\text{sol. } -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|a^2 - x^2|\right)$
43. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx$ $\text{sol. } x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 4) + \arctg \frac{x}{2}$
44. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$ $\text{sol. } \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2x} + \sqrt{7+8x^2})$
45. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$ $\text{sol. } \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsen \left(x \sqrt{\frac{5}{7}}\right)$
46. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx$ $\text{sol. } \frac{1}{3} \ln|3x^2 - 2| - \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right|$
47. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx$ $\text{sol. } \frac{3}{\sqrt{35}} \arctg \left(\sqrt{\frac{5}{7}} x\right) - \frac{1}{5} \ln(5x^2 + 7)$
48. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx$ $\text{sol. } \frac{3}{5} \sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1})$
49. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$ $\text{sol. } \sqrt{x^2-4} + 3 \ln|x + \sqrt{x^2-4}|$
50. $\int \frac{x dx}{x^2-5}$ $\text{sol. } \frac{1}{2} \ln|x^2 - 5|$
51. $\int \frac{x dx}{2x^2+3}$ $\text{sol. } \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 3)$
52. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2} dx$ $\text{sol. } \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \arctg \frac{ax}{b}$
53. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ $\text{sol. } \frac{1}{2} \arcsen \frac{x^2}{a^2}$
54. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$ $\text{sol. } \frac{1}{3} \arctg x^3$
55. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$ $\text{sol. } \frac{1}{3} \ln|x^3 + \sqrt{x^6-1}|$
56. $\int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} dx$ $\text{sol. } \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsen x)^3}$
57. $\int \frac{\arctg \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$ $\text{sol. } \frac{(\arctg \frac{x}{2})^2}{4}$
58. $\int \frac{x-\sqrt{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx$ $\text{sol. } \frac{1}{8} \ln(1+4x^2) - \sqrt{\frac{(\arctg 2x)^3}{3}}$
59. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$ $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$
60. $\int ae^{-mx} dx$ $-\frac{a}{m} e^{-mx}$
61. $\int 4^{3-3x} dx$ $-\frac{1}{3 \ln 4} 4^{2-3x}$
62. $\int (e^t - e^{-t}) dt$ $e^t + e^{-t}$
63. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$ $\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}$



64. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$ $\frac{1}{\ln a - \ln b} \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x} \right) - 2x.$
65. $\int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx$ $\frac{2}{\ln a} \left(\frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x} \right).$
66. $\int e^{-(x^2+1)} x dx$ $\frac{1}{2e^{x^2+1}}.$
67. $\int x 7^{x^2} dx$ $\frac{1}{2 \ln 7} 7^{x^2}.$
68. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $-e^{\frac{1}{x}}.$
69. $\int 5\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\frac{2}{\ln 5} 5^{\sqrt{x}}.$
70. $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ $\ln|e^x - 1|.$
71. $\int e^x \sqrt{a - be^x} dx$ $-\frac{2}{3b} \sqrt{(a - be^x)^3}.$
72. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}} dx$ $\frac{3a}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + 1 \right)^{\frac{4}{3}}.$
73. $\int \frac{dx}{2^x+3}$ Indicación. $\frac{1}{2^x+3} \equiv \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2^x}{2^x+3} \right)$ $\frac{x}{3} - \frac{1}{3 \ln 2} \ln(2^x + 3).$
74. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$ $\frac{1}{\ln a} \operatorname{arctg}(a^x).$
75. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx$ $-\frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}} \right|.$
76. $\int \frac{e^t dt}{1-e^{2t}}$ $\operatorname{arcsen} e^t$
77. $\int \operatorname{sen}(a + bx) dx$ $-\frac{1}{b} \cos(a + bx)$
78. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx$ $\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}$
79. $\int (\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2 dx$ $x - \frac{1}{2a} \cos 2ax$
80. $\int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $2 \operatorname{sen} \sqrt{x}$
81. $\int \operatorname{sen}(\lg x) \frac{dx}{x}$ $-\ln 10 \cdot \cos(\lg x)$
82. $\int \operatorname{sen}^2 x dx$ Notas $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$
83. $\int \cos^2 x dx$ $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}.$
84. $\int \sec^2(ax + b) dx$ $\frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax + b)$
85. $\int \operatorname{ctg}^2 ax dx$ $-\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x$



$$86. \int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{a}}$$

$$a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2a} \right|$$

$$87. \int \frac{dx}{3 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\frac{1}{15} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|$$

$$88. \int \frac{dx}{\operatorname{sen} (ax+b)}$$

$$\frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax+b}{2} \right|$$

$$89. \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} (x^2)$$

$$90. \int x \operatorname{sen} (1 - x^2) dx$$

$$\frac{1}{2} \cos (1 - x^2)$$

$$91. \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x \sqrt{2}} - 1 \right)^2 dx$$

$$x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} x \sqrt{2} - \sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{2} \right|$$

$$92. \int \operatorname{tg} x dx$$

$$- \ln |\cos x|$$

$$93. \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$\ln |\operatorname{sen} x|$$

$$94. \int \operatorname{ctg} \frac{x}{a-b} dx$$

$$(a-b) \ln \left| \operatorname{sen} \frac{x}{a-b} \right|$$

$$95. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{5}}$$

$$5 \ln \left| \operatorname{sen} \frac{x}{5} \right|$$

$$96. \int \operatorname{tg} \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$-2 \ln |\cos \sqrt{x}|$$

$$97. \int x \operatorname{ctg} (x^2 + 1) dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen} (x^2 + 1)|$$

$$98. \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$\ln |\operatorname{tg} x|$$

$$99. \int \cos \frac{x}{a} \operatorname{sen} \frac{x}{a} dx$$

$$\frac{a}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{a}$$

$$100. \int \operatorname{sen}^3 6x \cos 6x dx$$

$$\frac{\operatorname{sen}^4 6x}{24}$$

$$101. \int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen}^5 ax} dx$$

$$- \frac{1}{4a \operatorname{sen}^4 ax}$$

$$102. \int \frac{\operatorname{sen} 3x}{3 + \cos 3x} dx$$

$$- \frac{1}{3} \ln (3 + \cos 3x)$$



103. $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{\sqrt{\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} dx$ $-\frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{cos} 2x}$
104. $\int \sqrt{1 + 3\operatorname{cos}^2 x} \operatorname{sen} 2x dx$ $-\frac{2}{9} \sqrt{(1 + 3\operatorname{cos}^2 x)^3}$
105. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} \operatorname{sec}^3 \frac{x}{3} dx$ $\frac{3}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}$
106. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{cos}^2 x} dx$ $\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$
107. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$ $-\frac{3\operatorname{ctg}^5 x}{5}$
108. $\int \frac{1 + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{cos}^2 3x} dx$ $\frac{1}{3} (\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{\operatorname{cos} 3x})$
109. $\int \frac{(\operatorname{cos} ax + \operatorname{sen} ax)^2}{\operatorname{sen} ax} dx$ $\frac{1}{4} (\ln |\operatorname{tg} \frac{ax}{2}| + 2 \operatorname{sen} ax)$
110. $\int \frac{\operatorname{csc}^2 3x}{b - a \operatorname{ctg} 3x} dx$ $\frac{1}{3a} \ln |b - a \operatorname{ctg} 3x|$
111. $\int (2 \operatorname{sh} 5x - 3 \operatorname{ch} 5x) dx$ $\frac{2}{5} \operatorname{ch} 5x - \frac{3}{5} \operatorname{sh} 5x$
112. $\int \operatorname{sh}^2 x dx$ $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$
113. $\int \frac{dx}{\operatorname{ah} x}$ $-6\sqrt[3]{x}$
114. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$ $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} + \frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$
115. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$ $2a\sqrt{ax} + 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$
116. $\int \operatorname{tg} x dx$ $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}$
117. $\int \operatorname{ctg} x dx$ $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}} \right|$
118. $\int x^5 \sqrt[5]{5 - x^3} dx$ $\ln(z + \sqrt{4 + x^2})$
119. $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 1} dx$ $\operatorname{arcsen} \frac{x}{2\sqrt{2}}$
120. $\frac{x^3}{x^3 + 5} dx$ $\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{2}} - \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 2})$
121. $\int x^{e-x^2} dx$ a) $\operatorname{tg} x - x$ indicación poner $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x - 1$
b) $x - \operatorname{th} x$. Indicación poner $\operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
122. $\int \frac{3 - \sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2} dx$ $-\operatorname{ctg} x - x$; b) $x - \operatorname{cht} x$
123. $\int \frac{x^3 - 1}{x + 1} dx$ $\frac{(3e)^x}{\operatorname{Ln} 3 + 1}$
124. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$ $\operatorname{Ln} \left| \frac{C}{a - x} \right|$
125. $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{cos} x}$ $x + \operatorname{Ln} |2x + 1|$
126. $\int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{sen} 3x}$ $\frac{3}{2} x + \frac{11}{4} \operatorname{Ln} |3 + 2x|$
127. $\int \frac{dx}{x \operatorname{Lx}^2 x}$ $\frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \operatorname{Ln} |a + bx|$
128. $\int \frac{\operatorname{sec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}} dx$ $\frac{a}{x} x + \frac{ba - aB}{a^2} \operatorname{Ln} |ax + B|$
129. $\int (2 + \frac{x}{x^2 + 1}) \frac{dx}{2x^2 + 1}$ $\frac{x^2}{2} + x + 2 \operatorname{Ln} |x - 1|$



130. $\int a^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$ $\frac{a^{\operatorname{sen} x}}{\ln a}$.
131. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} \, dx$ $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$.
132. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^2)$.
133. $\int \operatorname{tg}^2 a x \, dx$ $\frac{1}{a} \operatorname{tg} ax - x$.
134. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \, dx$ $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2}$.
135. $\int \frac{\operatorname{sec}^2 x \, dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$ $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\operatorname{tg} x}{2}$.
136. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}$ $a \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.
137. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} \, dx$ $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$.
138. $\int \operatorname{tg} \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ $-2 \ln |\cos \sqrt{x-1}|$.
139. $\int \frac{x \, dx}{\operatorname{sen}(x^2)}$ $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x^2}{2} \right|$.
140. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} \, dx$ $e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} + \frac{\ln^2(1+x^2)}{4} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.
141. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx$ $-\ln |\operatorname{sen} x + \cos x|$.
142. $\int \frac{(1-\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}})^2}{\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}} \, dx$ $\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2\sqrt{2}} \right| - 2x - \sqrt{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$.
143. $\int \frac{x^2}{x^2-2} \, dx$ $x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right|$.
144. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} \, dx$ $\ln|x| + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.
145. $\int e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x \, dx$ $e^{\operatorname{sen}^2 x}$.



146. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$ $\frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4-3x^3}$.
147. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ $x - \ln(1 + e^x)$.
148. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.
149. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx$ $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-2})$
150. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax + \operatorname{cos} ax}$ $\frac{1}{a} \ln |\operatorname{tg} ax|$
151. $\int \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0) dt$ $-\frac{T}{2\pi} \operatorname{cos}(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0)$
152. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$ $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\ln x}{2-\ln x} \right|$
153. $\int \frac{\operatorname{arccos} \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$ $-\frac{(\operatorname{arccos} \frac{x}{2})^2}{2}$
154. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \operatorname{sec}^2$ $-e^{-\operatorname{tg} x}$
155. $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}} dx$ $\frac{1}{2} \operatorname{arccsen} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}} \right)$
156. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos}^2 x}$ $-2 \operatorname{ctg} 2x$
157. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $-\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2}$
158. $\int \frac{\operatorname{sec} x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{sec}^2 x + 1}} dx$ $\ln(\operatorname{sec} x + \sqrt{\operatorname{sec}^2 x + 1})$
159. $\int \frac{\operatorname{cos} 2x}{4+\operatorname{cos}^2 2x} dx$ $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{5}-\operatorname{sen} 2x} \right|$
160. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{cos}^2 x}$ *Indicación.* $\int \frac{dx}{1+\operatorname{cos}^2 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{cos}^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\operatorname{cos}^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2}$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right)$



161. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}} dx$ $\frac{2}{3} \sqrt{[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]^3}$

162. $\int x^2 ch(x^3 + 3) dx$ $\frac{1}{3} sh(x^3 + 3)$

163. $\int \frac{3^{thx}}{ch^2x} dx$ $\frac{1}{\ln 3} 3^{thx}$

Hallar las siguientes integrales, utilizando para ellos las sustituciones indicadas:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, x = \frac{1}{t}$ *cuando $x > \sqrt{2}$* $\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}}{x}$

b) $\int \frac{dx}{e^{x+1}}, x = -\ln t$ $-\ln(1 + e^{-x})$

c) $\int x(5x^2 - 3)^7 dx, 5x^2 - 3 = t$ $\frac{1}{80} (5x^2 - 3)^8$

d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, t = \sqrt{x+1}$ $\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2$

e) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2x}}, t = \sin x$ $\ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2x})$

Hallar las integrales siguientes, empleando para ello las sustituciones más adecuadas:

1. $\int x(2x + 5)^{10} dx$ $\frac{1}{4} \left[\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11} \right]$

2. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln|1 + \sqrt{x}|\right)$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ $\ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right|$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ $2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}$

5. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}$ $\ln x - \ln 2 \ln |\ln x + 2 \ln 2|$

6. $\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\frac{(\operatorname{arcsen} x)^3}{3}$



$$7. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx \qquad \frac{2}{3}(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1}$$

$$8. \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx \qquad \frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x}$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} \right|$$

Hallar las siguientes integrales, empleando sustituciones trigonométricas.

$$10. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} \qquad -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x$$

$$11. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}} \qquad -\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2} - \frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$$

$$12. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx \qquad \sqrt{x^2-a^2} - \operatorname{arccos} \frac{a}{x}$$

$$13. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{arccos} \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0, \text{ y } \operatorname{arccos} \left(-\frac{1}{x}\right), \text{ si } x < 0$$

$$14. \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx \qquad \sqrt{x^2+1} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \right|$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \qquad -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$$

$$16. \int \sqrt{1-x^2} dx \qquad \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x$$

Calcular la integral

$$17. \int \frac{dx}{x(1-x)} \qquad 2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$$

$$18. \int \sqrt{a^2+x^2} dx \qquad \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$19. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$$

Hallar las siguientes integrales, utilizando la fórmula para integración por partes:

$$20. \int \ln x dx \qquad x \ln x - x$$

$$21. \int \operatorname{arctg} x dx \qquad \operatorname{sol.} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$



22. $\int \arcsen x dx$ sol. $x \arcsen x + \sqrt{1-x^2}$
23. $\int x \sen x dx$ sol. $\sen x - x \cos x$
24. $\int x \cos 3x dx$ sol. $\frac{x \sen 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9}$
25. $\int \frac{x}{e^x} dx$ sol. $-\frac{x+1}{e^x}$
26. $\int x \cdot 2^{-x} dx$ sol. $-\frac{x \ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2}$
27. $\int x^2 e^{3x} dx$ sol. $\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2)$
28. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$ sol. $-e^x (x^2 + 5)$
29. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$ sol. $-e^{-\frac{x}{3}} (x^3 + 9x^2 + 54x + 162)$
30. $\int x \sen x \cos x dx$ sol. $-\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sen 2x}{5}$
31. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$ sol. $\frac{2x^2 + 10x + 11}{4} \sen 2x + \frac{2x+5}{4} \cos 2x$
32. $\int x^2 \ln x dx$ sol. $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$
33. $\int \ln^2 x dx$ sol. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$
34. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ sol. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$
35. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ sol. $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}$
36. $\int x \arctg x dx$ sol. $\frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2}$
37. $\int x \arcsen x dx$
sol. $\frac{x^2}{2} \arcsen x - \frac{1}{4} \arcsen x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}$
38. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ sol. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$
39. $\int \frac{xdx}{\sen^2 x}$ sol. $-x \ctg x + \ln|\sen x|$
40. $\int \frac{x \cos x}{\sen^2 x}$ sol. $-\frac{x}{\sen x} + \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right|$
41. $\int e^x \sen x dx$ sol. $\frac{e^x(\sen x - \cos x)}{2}$
42. $\int 3^x \cos x dx$ sol. $\frac{3^x(\sen x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2}$
43. $\int e^{ax} \sen bx dx$ sol. $\frac{e^{ax}(a \sen bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$
44. $\int \sen(\ln x) dx$ sol. $\frac{x}{2} [\sen(\ln x) - \cos(\ln x)]$



Hallar las siguientes integrales, empleando diferentes procedimientos:

1. $\int x^3 e^{-x^2} dx$ $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2 + 1)$
2. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$
3. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$ $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x$
4. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$ $\frac{x^2-1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - x$
5. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}$
6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ $[\ln(\ln x) - 1] \cdot \ln x$
7. $\int x^2 \arctg 3x dx$ $\frac{x^3}{3} \arctg 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162} \ln(9x^2 + 1)$
8. $\int x(\arctg x)^2 dx$ $\frac{1+x^2}{2} (\arctg x)^2 - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$
9. $\int (\arcsen x)^2 dx$ $x(\arcsen x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsen x - 2x$
10. $\int \frac{\arcsen x}{x^2} dx$ $-\frac{\arcsen x}{x} + \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right|$
11. $\int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ $-2\sqrt{1-x} \arcsen \sqrt{x} + 2\sqrt{x}$
12. $\int x t g^2 2x dx$ $\frac{x t g 2x}{2} + \frac{\ln |\cos 2x|}{4} - \frac{x^2}{2}$
13. $\int \frac{\sen^2 x}{e^x} dx$ R.- $\frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{\cos 2x - 2 \sen 2x}{5} - 1 \right)$
14. $\int \cos^2(\ln x) dx$ R.- $\frac{x}{2} + \frac{x \cos(2 \ln x) + 2x \sen(2 \ln x)}{10}$
15. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ R.- $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x$
16. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ R.- $\frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2} \right)$
17. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ R.- $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a}$
18. $\int \sqrt{A + x^2} dx$ R.- $\frac{x}{2} \sqrt{A + x^2} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{A + x^2}|$
19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$ R.- $-\frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \arcsen \frac{x}{3}$
20. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ R.- $\frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2}$
21. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$ R.- $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|$
22. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$ R.- $\frac{2}{\sqrt{11}} \arctg \frac{6x-1}{\sqrt{11}}$
23. $\int \frac{x dx}{x^2-7x+13}$ R.- $\frac{1}{2} x \ln(x^2 - 7x + 13) + \frac{7}{\sqrt{3}}$
24. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$ R.- $\frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + 4 \arctg(x - 2)$
25. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx$ R.- $x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2x+3}{\sqrt{7}}$
26. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}$ R.- $x + 3 \ln(x^2 - 6x + 10) + 8 \arctg(x - 3)$



27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ R. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsen \frac{4x-3}{5}$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ R. $-\arcsen (2x - 1)$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ R. $-\ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right|$
30. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$ R. $-3\sqrt{x^2 - 4x + 5}$
31. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$ $-2\sqrt{1-x-x^2} - 9 \arcsen \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$
32. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}} dx$ $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \ln(x\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2-2x+1})$
33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ $\ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right|$
34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$ $-\arcsen \frac{2-x}{x\sqrt{5}}$
35. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$ $\arcsen \frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}} (x > \sqrt{2})$
36. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ $-\arcsen \frac{1}{x+1}$
37. $\int \sqrt{x^2+2x+5} dx$ $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2 \ln (x+1+\sqrt{x^2+2x+5})$
38. $\int \sqrt{x-x^2} dx$ $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsen(2x-1)$
39. $\int \sqrt{2-x-x^2} dx$ $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsen \frac{2x+1}{3}$
40. $\int \frac{x dx}{x^2-4x^2+3}$ $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-3}{x^2-1} \right|$
41. $\int \frac{\cos x}{\sen^2 x - 6 \sen x + 12} dx$ $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{3-\sen x}{\sqrt{3}}$
42. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$ $\ln(e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+e^x+e^{2x}})$
43. $\int \frac{\sen x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$ $-\ln |\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}|$
44. $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1-4 \ln x - \ln^2 x}}$ $-\sqrt{1-4 \ln x - \ln^2 x} - 2 \arcsen \frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}$



45. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+b)}$ $\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| (a \neq b)$
46. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$ $x + 3 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2|$
47. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4} \right|$
48. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$ $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right|$
49. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$ $5x + \ln \frac{x^{1/2} (x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}$
50. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ $\frac{1}{1+x} + \ln \frac{x}{x+1}$
51. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$ $\frac{1}{4} X + \frac{1}{16} \ln \frac{x^{16}}{(2x-1)^7 (2x+1)^9}$
52. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} dx$ $\frac{X^2}{2} - \frac{11}{(X-2)^2} - \frac{8}{X-2}$
53. $\int \frac{5X^2+6X+9}{(X-3)^2(X+1)^2} dx$ $\frac{9}{2(X-3)} - \frac{1}{2(X+1)}$
54. $\int \frac{X^2-8X+7}{(X^2-3X-10)^2} dx$ $\frac{8}{49(X-5)} - \frac{27}{49(X+2)} + \frac{30}{343} \ln \frac{x-5}{x+2}$
55. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} dx$ $\frac{1}{2(X^2-3X+2)^2}$
56. $\int \frac{X^3+X+1}{X(X^2+1)} dx$ $X + \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
57. $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$ $X + \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \arctg x$
58. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$ $\frac{1}{52} \ln x - 3 - \frac{1}{20} \ln x - 1 + \frac{1}{65} \ln(x^2 + 4x + 5) + \frac{7}{130} \arctg(x + 2)$
59. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$
60. $\int \frac{dx}{x^4+1}$ $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2\sqrt{2}-1}{x^2-x\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg x \frac{\sqrt{2}}{1-x^2}$
61. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$
62. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ $\frac{x}{2(1-x^2)} + \frac{\arctg x}{2}$
63. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx$ $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \arctg(x + 1)$
64. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ $\ln x + 1 + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1)$
65. $\int \frac{X^3+1}{(X^2-4X+5)^2} dx$ $\frac{3X-17}{2(X^2-4X+5)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + \frac{15}{2} \arctg(x - 2)$
66. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ $\frac{X^2+X}{4(X+1)(X^2+1)} + \frac{1}{2} \ln x + 1 - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{4} \arctg x$



67. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ $-\frac{3}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$
68. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48} \operatorname{arctg} x.$
69. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2} dx$ $x - \frac{x-3}{x^2-2x+2} + 2 \ln(x^2 - 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x - 1).$
70. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} dx$ $\frac{1}{21} (8 \ln|x^3 - 8| - \ln|x^3 + 1|).$
71. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1} dx$ $\frac{1}{2} \ln|x^4 - 1| - \frac{1}{4} \ln|x^8 + x^4 - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}} \right|.$
72. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)} dx$ $-\frac{13}{2(x-4)^2} + \frac{3}{x-4} + 2 \ln \left| \frac{x-4}{x-2} \right|.$
73. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$ $\frac{1}{3} \left(2 \ln \left| \frac{x^3+1}{x^3} \right| - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3+1} \right).$
74. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|.$
75. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$ *Indicacion. Poner 1 = (x^7 + 1) - x^7* $\ln|x| - \frac{1}{7} \ln|x^7 + 1|.$
76. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$ $\ln|x| - \frac{1}{5} x \ln|x^5 + 1| + \frac{1}{5(x^5+1)}.$
77. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$ $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x + 1) - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2}.$
78. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}$ $-\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{7(x-1)^7}.$
79. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$ $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x.$
80. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$ $2\sqrt{x-1} \left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x \right].$
81. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{ax+b}}$ $\frac{3}{10a^2} x \left[2\sqrt{(ax+b)^5} - 5b\sqrt[3]{(ax+b)^2} \right].$
82. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$ $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1}.$
83. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ $6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x}).$
84. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}}$ $\frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x}| + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}.$
85. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$ $\ln \left| \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}.$
86. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$ $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}}$
87. $\int \frac{dx}{(2-x)(\sqrt{1-x})}$ $-2 \operatorname{arctg} \sqrt{1-x}$
88. $\int x^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} (x-2) + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$
89. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ *donde z = $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$* $\frac{1}{3} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{z^3-1}$
90. $\int \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} dx$ $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$
91. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ $\frac{2x+3}{4} \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \ln(2x-1 + 2\sqrt{x^2-x+1})$



92. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $-\frac{8+4x^2-3x^4}{15} \sqrt{1-x^2}$
93. $\int \frac{x^6}{1+x^2} dx$ $\left(\frac{5}{16}x - \frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{6}x^5\right) \sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
94. $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}$ $\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2}\right) \sqrt{x^2-1} - \frac{3}{2} \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$
95. $\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$ $\frac{1}{2(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{1}{x+1}$
96. $\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx$ $R + \ln|x| + \frac{3}{2} \ln - - (x - \frac{1}{2} + R) - \ln(1 - \frac{x}{2} + R)$
de donde $R = \sqrt{x^2 - x + 1}$
97. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$ $\frac{1}{2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$
98. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ $\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^{-4}+1}$
99. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$ $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$
100. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^5}}$ donde $z = \sqrt[3]{1+x^5}$ $\frac{1}{10} \ln \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$
101. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$ $-\frac{1}{8} \frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}}$
102. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ $-2 \sqrt[3]{(x^4+1)^2}$
103. $\int \cos^3 x dx$ $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x$
104. $\int \operatorname{sen}^5 x dx$ $\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$
105. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$ $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$
106. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$ $\frac{1}{4} \cos^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cos^6 \frac{x}{2}$
107. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^5 x} dx$ $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} - 2 \ln |\operatorname{sen} x|$
108. $\int \operatorname{sen}^4 x dx$ $\frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}$
109. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$ $\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}$
110. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx$ $\frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48}$
111. $\int \cos^6 3x dx$ $\frac{5}{16} x + \frac{1}{12} \operatorname{sen} 6x + \frac{1}{64} \operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144} \operatorname{sen}^3 6x$
112. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$ $-\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$
113. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$
114. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x} dx$ $\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}$
115. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$ $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2 \operatorname{ctg} 2x$



116. $\int \frac{dx}{\text{sen}^5 x \cos^3 x} \quad \frac{1}{2} \text{tg}^2 x + 3 \ln |\text{tg} x| - \frac{3}{2 \text{tg}^2 x} - \frac{1}{4 \text{tg}^4 x}$
117. $\int \frac{dx}{\text{sen}^{\frac{x}{2}} \cos^{\frac{3x}{2}}} \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 2 \ln |\text{tg} \frac{x}{2}|$
118. $\int \frac{\text{sen}(x + \frac{\pi}{4})}{\text{sen} x \cos x} dx \quad \frac{\sqrt{2}}{2} x \left[\ln \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]$
119. $\int \frac{dx}{\text{sen}^5 x} \quad \frac{-\cos x}{4 \text{sen}^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \text{sen}^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right|$
120. $\int \text{sen}^5 4x dx \quad \frac{\text{sen} 4x}{16 \cos^4 4x} + \frac{3 \text{sen} 4x}{32 \cos^2 4x} + \frac{3}{32} \ln \left| \text{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$
121. $\int \text{tg}^2 5x dx \quad = \frac{1}{5} \text{tg} 5x - x$
122. $\int \text{ctg}^3 x dx \quad = -\frac{\text{ctg}^2 x}{2} - \ln |\text{sen} x|$
123. $\int \text{ctg}^4 x dx \quad = -\frac{1}{3} \text{ctg}^3 x + \text{ctg} x + x$
124. $\int \left(\text{tg}^3 \frac{x}{3} + \text{tg}^4 \frac{x}{3} \right) dx \quad = \frac{3}{2} \text{tg}^2 \frac{x}{3} + \text{tg}^3 \frac{x}{3} - 3 \text{tg} \frac{x}{3} + 3 \ln \left| \cos \frac{x}{3} \right| + x$
125. $\int x \text{sen}^2 x^2 dx \quad = \frac{x^2}{4} - \frac{\text{sen} 2x^2}{8}$
126. $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^4 x} dx \quad = -\frac{\text{ctg}^3 x}{3}$
127. $\int \text{sen}^5 x \sqrt{\cos x} dx \quad = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16} \sqrt[3]{\cos^{16} x}$
128. $\int \frac{dx}{\sqrt{\text{sen} x \cos^3 x}} \quad = 2\sqrt{\text{tg} x}$
129. $1 \int \frac{dx}{\sqrt{\text{tg} x}} \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2+1}}{x^2 - x\sqrt{2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}, \text{ donde } x = \sqrt{\text{tg} x}$

2ª. INTEGRALES DE LAS FORMAS: $\int \text{sen} mx \cos nx dx$, $\int \text{sen} mx \text{sen} nx dx$ y $\int \cos mx \cos nx dx$.

En estos casos se emplean las formulas:

1) $\text{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x];$

2) $\text{sen} mx \text{sen} nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x];$

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x];$



EJEMPLO 7.

$$\int \text{sen}9x \text{sen}x dx = \int \frac{1}{2} [\cos 8x - \cos 10x] dx = \frac{1}{16} \text{sen}8x - \frac{1}{20} \text{sen}10x + C$$

Hallar las integrales:

1. $\int \text{sen}3x \cos 5x dx = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4}$
2. $\int \text{sen}10x \text{sen}15x dx = -\frac{\text{sen}25x}{50} + \frac{\text{sen}5x}{10}$
3. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx = \frac{3}{5} \text{sen} \frac{5x}{6} + 3 \text{sen} \frac{x}{6}$
4. $\int \text{sen} \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx = \frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x$
5. $\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) dx = \frac{\text{sen}2ax}{4a} + \frac{x \cos 2b}{2}$
6. $\int \text{sen}wt \text{sen}(wt + \varphi) dt = \frac{t \cos \varphi}{2} - \frac{\text{sen}(2wt + \varphi)}{4w}$
7. $\int \cos x \cos^2 3x dx = \frac{\text{sen}x}{2} + \frac{\text{sen}5x}{20} + \frac{\text{sen}7x}{18}$
8. $\int \text{sen}x \text{sen}2x \text{sen}3x dx = \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x$
9. $\int \frac{dx}{3+5 \cos x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \text{tg} \frac{x}{2}}{2 - \text{tg} \frac{x}{2}} \right|$
10. $\int \frac{dx}{\text{sen}x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \text{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right|$
11. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = x - \text{tg} \frac{x}{2}$
12. $\int \frac{\text{sen} x}{1-\text{sen} x} dx = -x + \text{tg} x + \sec x$
13. $\int \frac{dx}{8-4 \text{sen} x + 7 \cos^2 x} = \ln \left| \frac{\text{tg} \frac{x}{2} - 5}{\text{tg} \frac{x}{2} - 3} \right|$
14. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \text{sen} x + 3} = \arctg \left(1 - \text{tg} \frac{x}{2} \right)$
15. $\int \frac{3 \text{sen} x + 2 \cos x}{2 \text{sen} x + 3 \cos x} dx = \frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln |2 \text{sen} x + 3 \cos x|$
16. $\int \frac{1+\text{tg} x}{1-\text{tg} x} dx = -\ln |\cos x - \text{sen} x|$
17. $\int \frac{dx}{1+3 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\text{tg} x}{2} \right)$
18. $\int \frac{dx}{3 \text{sen}^2 x + 5 \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{15}} \arctg \left(\frac{\sqrt{3} \text{tg} x}{\sqrt{5}} \right)$
19. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x + 3 \text{sen} x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \text{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2 \text{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right|$
20. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x - 5 \text{sen} x \cos x} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\text{tg} x - 5}{\text{tg} x} \right|$



$$\begin{aligned}
 21. \int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3} dx &= -\frac{1}{2(1-\cos x)^2} \\
 22. \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx &= \ln(1+\operatorname{sen}^2 x) \\
 23. \int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x} dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{2} - \operatorname{sen} 2x} \\
 24. \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 6 \operatorname{sen} x + 5} dx &= \frac{1}{4} \ln \frac{5-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \\
 25. \int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}} \\
 26. \int \frac{1-\operatorname{sen} x + \cos x}{1+\operatorname{sen} x - \cos x} dx &= -x + 2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|
 \end{aligned}$$

EMPLEAR MÉTODO DE SUSTITUCIÓN. TRIGONOMÉTRICA. E HIPERBÓLICA

$$\begin{aligned}
 27. \int \operatorname{sh}^3 x dx &= \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x \\
 28. \int \operatorname{ch}^4 x dx &= \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} \\
 29. \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x dx &= \frac{\operatorname{sh}^4 x}{4} \\
 30. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx &= -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} \\
 31. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x} &= \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\
 32. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} &= -2 \operatorname{cth} 2x \\
 33. \int \operatorname{th}^3 x dx &= \ln(\operatorname{ch} x) - \frac{\operatorname{th}^2 x}{2} \\
 34. \int \operatorname{cth}^4 x dx &= x - \operatorname{cth} x \frac{\operatorname{cth}^3 x}{3} \\
 35. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x) \\
 36. \int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x} &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{th} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}} \right) \left(\text{ó} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(e^x \sqrt{5}) \right) \\
 37. \int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1} &= \frac{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} 2x}{2} - \frac{x}{2} \\
 38. \int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x})
 \end{aligned}$$

Hallar las integrales:

$$\begin{aligned}
 39. \int \sqrt{3-2x-x^2} dx &= \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{2} \\
 40. \int \sqrt{2+x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{2+x^2} + \ln(x + \sqrt{2+x^2}) \\
 41. \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2} \ln(x + \sqrt{9+x^2}) \\
 42. \int \sqrt{x^2-2x+2} dx &= \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \ln(x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}) \\
 43. \int \sqrt{x^2-4} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-4} - 2 \ln|x + \sqrt{x^2-4}|
 \end{aligned}$$



44. $\int \sqrt{x^2 + x} dx$ $\frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{8} \ln |2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}|$
45. $\int \sqrt{x^2 - 6x - 7} dx$ $\frac{x-3}{2} \sqrt{x^2 - 6x - 7} - 8 \ln |x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x - 7}|$
46. $\int (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} dx$
 $\frac{1}{64} (2x + 1)(8x^2 + 8x + 17) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{17}{128} \ln(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})$
47. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$ $2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$
48. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$
49. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$
50. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right|$
51. $\int (x^2 + 1)^2 e^{2x} dx$ $\frac{e^{2x}}{2} (x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + \frac{7}{2})$
52. $\int x^2 \cos^2 3x dx$ $\frac{1}{6} (x^3 + \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} 6x + \frac{x}{6} \cos 6x - \frac{1}{36} \operatorname{sen} 6x)$
53. $\int x \operatorname{sen} x \cos 2x dx$ $\frac{x \cos 3x}{6} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{18} + \frac{x \cos x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2}$
54. $\int e^{3x} \operatorname{sen}^2 x dx$ $\frac{e^{2x}}{8} (2 - \operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$
55. $\int e^x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x dx$ $\frac{e^x}{2} x (\frac{2 \operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{5} - \frac{4 \operatorname{sen} 4x + \cos 4x}{17})$
56. $\int x e^x \cos x dx$ $\frac{e^x}{2} |x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{sen} x|$
57. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$ $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2)$
58. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$ $x + \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$
59. $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ $\frac{1}{3} [x^3 \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2)] + x^2$
60. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ $x \ln^2 x(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$
61. $\int x \arccos(5x - 2) dx$
 $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{100} x \arccos(5x - 2) - \frac{5x + 6}{100} \sqrt{20x - 25x^2 - 3}$
62. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sh} x dx$ $\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{ch} x - \operatorname{cos} x \operatorname{sh} x}{2}$



Empleo de las fórmulas de reducción.

Deducir las fórmulas de reducción de las integrales:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}; \text{ hallar } I_2 \text{ e } I_3.$$

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right]; \quad I_2 = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} \right);$$

$$I_3 = \frac{1}{4a^2} \left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} \right].$$

Empleo de las fórmulas de reducción

Deducir las fórmulas de reducción de las integrales.

1428. $I_n = \int \text{sen}^n x \, dx$; hallar I_4 e I_5

$$I_n = -\frac{\cos x \text{sen}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}; \quad I_4 = \frac{3x}{8} - \frac{\cos x \text{sen}^3 x}{4} - \frac{3 \text{sen} 2x}{16};$$

$$I_5 = -\frac{\cos x \text{sen}^4 x}{5} - \frac{4}{15} \cos x \text{sen}^2 x - \frac{8}{15} \cos x$$

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}; \text{ hallar } I_3 \text{ e } I_4.$$

$$I_n = \frac{\text{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; \quad I_3 = \frac{\text{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|;$$

$$I_4 = \frac{\text{sen} x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3} \text{tg} x.$$

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx; \text{ hallar } I_{10}$$

$$I_n = -x^n e^{-x} - n I_{n-1}; \quad I_{10} = -e^{-x}(x^{10} + 10x^9 + 10.9x^8 + 10.9.8 2x + \dots).$$

1. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9} \qquad \frac{1}{\sqrt{14}} \arctg \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}.$

2. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx \qquad I_n \sqrt{x^2-2x+2} - 4 \arctg(x-1)$

3. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}} dx \qquad \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(x^2+x+\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \arctg(2x+1)$

4. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)} \qquad \frac{1}{5} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$

5. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2} \qquad 2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$



6. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ $\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right| - \frac{1}{x+1} \right)$
7. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ $\frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$
8. $\int \frac{dx}{x^4-2x+1}$ $\frac{1}{4} \left(\frac{2x}{1-x^2} + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right)$
9. $\int \frac{x dx}{(x^2-x+1)^3}$ $\frac{1}{6} \frac{x-2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$
10. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}$ $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$
11. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx$ $-\frac{1}{x} - \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$ $\ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x-1} \right)$
13. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx$ $\sqrt{2x} - \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x)^6}$
14. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}})^2}$ $-\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}$
15. $\int \frac{2x+1}{(\sqrt{4x^2-2x+1})^3} dx$ $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}$ $-2(\sqrt[4]{5-x} - 1)^2 - 4 \ln(1 + \sqrt[4]{5-x})$
17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx$ $\ln |x + \sqrt{x^2-1}| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
18. $\int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ $-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$
19. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$ $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \times \frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$
20. $\int \frac{x+1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx$ $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$
21. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$ $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x} \right| - \frac{1}{8-\sqrt{3}} \times \operatorname{arcsen} \frac{2(x+1)}{x+4}$
22. $\int \sqrt{x^2-9} dx$ $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-9}|$
23. $\int \sqrt{x-4x^2} dx$ $\frac{1}{16} (8x-1) \times \sqrt{x-4x^2} + \frac{1}{64} \operatorname{arcsen}(8x-1)$
24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ $\ln \left| \frac{x}{2x+2+2\sqrt{x^2+x+1}} \right|$



25. $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 2} dx$

$$\frac{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{3} - \frac{(x + 1)}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2}\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2})$$

26. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}$$

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$$-\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\ln(z^2+z+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$

29. $\int \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$

$$\frac{2}{5}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4})$$

30. $\int \cos^4 x dx$

$$\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + \frac{\operatorname{sen}4x}{32}$$

31. $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^5 x}$

$$\ln|\operatorname{tg} x| - \operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$$

32. $\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

$$-\operatorname{ctg} x - \frac{2\sqrt{(\cot x)^3}}{3}$$

33. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$

$$\frac{5}{12}(\cos^2 x - 6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$$

34. $\int \operatorname{csc}^5 5x dx$

$$-\frac{\cos 5x}{20 \operatorname{sen}^4 5x} - \frac{3 \cos 5x}{40 \operatorname{sen}^2 5x} + \frac{3}{40} \cdot \ln\left[\operatorname{tg} \frac{5x}{2}\right]$$

35. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$$

36. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$

$$\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$$

37. $\int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

38. $\int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x - 5}$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4 \operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$$

39. $\int \frac{dx}{2+3 \cos^2 x}$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{10}}\right)$$

40. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2 \operatorname{sen}^2 x}$

$$\operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x + 1)$$

41. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x}$

$$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$$

42. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

43. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1}} dx$

$$\ln|\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1}|$$

44. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \operatorname{sen}^2 ax}} dx$

$$\frac{1}{a}\ln(\operatorname{sen} ax + \sqrt{a^2 + \operatorname{sen}^2 ax})$$

45. $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}$

$$\frac{1}{3}x \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$$

46. $\int x \operatorname{sen}^2 x dx$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$$



47. $\int x^2 e^{x^3} dx$ $\frac{1}{3} e^{x^3}$
48. $\int x e^{2x} dx$ $\frac{e^{2x}}{4} (2x - 1)$
49. $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx$ $\frac{x^3}{3} \ln \sqrt{1-x} - \frac{1}{6} \ln|x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6}$
50. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
51. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$ $\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \frac{1}{10} \operatorname{sen} \frac{5x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$
52. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$ $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$
53. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1) \operatorname{sen}^2 x}$ $\ln|1 + \operatorname{ctg} x|$
54. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx$ $\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}$
55. $\int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$ $-2 \operatorname{ch} \sqrt{1-x}$
56. 1486. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x^2 + \operatorname{ch} x^2} dx$ $\frac{1}{5} \ln \operatorname{ch} 2x$
57. 1487. $\int \frac{x}{\operatorname{sh} x^2} dx$ $-x \operatorname{cth} x + \ln|\operatorname{sh} x|$
58. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$ $\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln|e^x - 2|$
59. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx$ $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$
60. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^4} dx$ $\frac{4}{7} \sqrt[4]{(e^x + 1)^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3}$
61. $\int \frac{2^x}{1-4^x} dx$ $\frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$
62. $\int (x^2 - (-1)) 10^{-2x} dx$ $-\frac{10^{-2x}}{2 \ln 10} x (x^2 - 1 + \frac{x}{\ln 10} + \frac{1}{2 \ln^2 10})$
63. $\int \sqrt{e^x + 1} dx$ $2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$
64. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ $\ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$
65. $\int x^3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx$ $\frac{1}{4} (x^4 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{x^2 - 1})$
66. $\int \cos(\ln x) dx$ $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \operatorname{sen} \ln x)$
67. $\int (x^3 - 3x) \operatorname{sen} 5x dx$ $\frac{1}{5} (-x^2 \cos 5x + \frac{2}{5} x \operatorname{sen} 5x + 3x \cos 5x + \frac{2}{25} \cos 5x - \frac{3}{5} \operatorname{sen} 5x)$
68. $\int x \operatorname{arctg} (2x + 3) dx$ $\frac{1}{2} \left[(x^2 - 2) \operatorname{arctg} (2x + 3) + \frac{3}{4} \ln(2x^2 + 6x + 5) - \frac{x}{2} \right]$
69. $\int \operatorname{arcsen} \sqrt{x} dx$ $\frac{1}{2} \sqrt{x - x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$
70. $\int |x| dx$ $\frac{x|x|}{2}$



Bibliografía

Penrose, R. (2002). *La mente nueva del emperador. En torno a la cibernética, la mente y las leyes de la física* (segunda ed.). Distrito Federal, México: Centro de Cultura Económica.

Problemario de precálculo y cálculo

Se terminó de imprimir en julio de 2016

Editorial Centro de estudios e investigaciones
para el desarrollo docente. Cenido AC
Pompeya N° 2705 Col. Providencia
C.P. 44630 Guadalajara, Jalisco, México
Teléfono: 3315 420983

www.cenido.org.mx